МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, КУЛЬТУРЫ И ИССЛЕДОВАНИЙ РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Ион Акири Андрей Брайков Ольга Шпунтенко

Математика

Учебник

7 КЛАСС

Cartdidact

Manualul a fost aprobat prin ordinul Ministrului Educației al Republicii Moldova (nr. 459 din 1 iunie 2012). Lucrarea este elaborată conform curriculumului disciplinar şi finanțată din Fondul Special pentru Manuale.

Şcoala/Liceul ....
Manualul nr. ....

Anul de folosire	Numele şi prenumele elevului care a primit manualul	Anul şcolar	Aspectul manualului	
			la primire	la returnare
1				
2				
3				
4				
5				

• Dirigintele va controla dacă numele elevului este scris corect.
• Elevii nu trebuie să facă niciun fel de însemnări în manual.
• Aspectul manualului (la primire şi la returnare) se va aprecia: *nou*, *bun*, *satisfăcător*, *nesatisfăcător*.

Autori: *Ion Achiri*, doctor, conferențiar universitar, IŞE
Andrei Braicov, doctor, conferențiar universitar, UST
Olga Şpuntenco, profesoară, grad didactic superior, Liceul Teoretic „Gaudeamus”, Chişinău

Comisia de evaluare: *Dorin Afanas*, doctor în ştiințe fizico-matematice, conferențiar universitar, UST
Maria Efros, profesoară, grad didactic superior, Liceul de Creativitate şi Inventică „Prometeu-Prim”, Chişinău
Aliona Pogreban, profesoară, grad didactic I, Liceul Teoretic „Minerva”, Chişinău

Traducere din limba română: *Antonina Erhan*
Redactor: *Andrei Braicov*
Corector: *Lidia Paşa*
Coperta: *Sergiu Stanciu*
Paginare computerizată: *Valentina Stratu*

Descrierea CIP a Camerei Naționale a Cărții

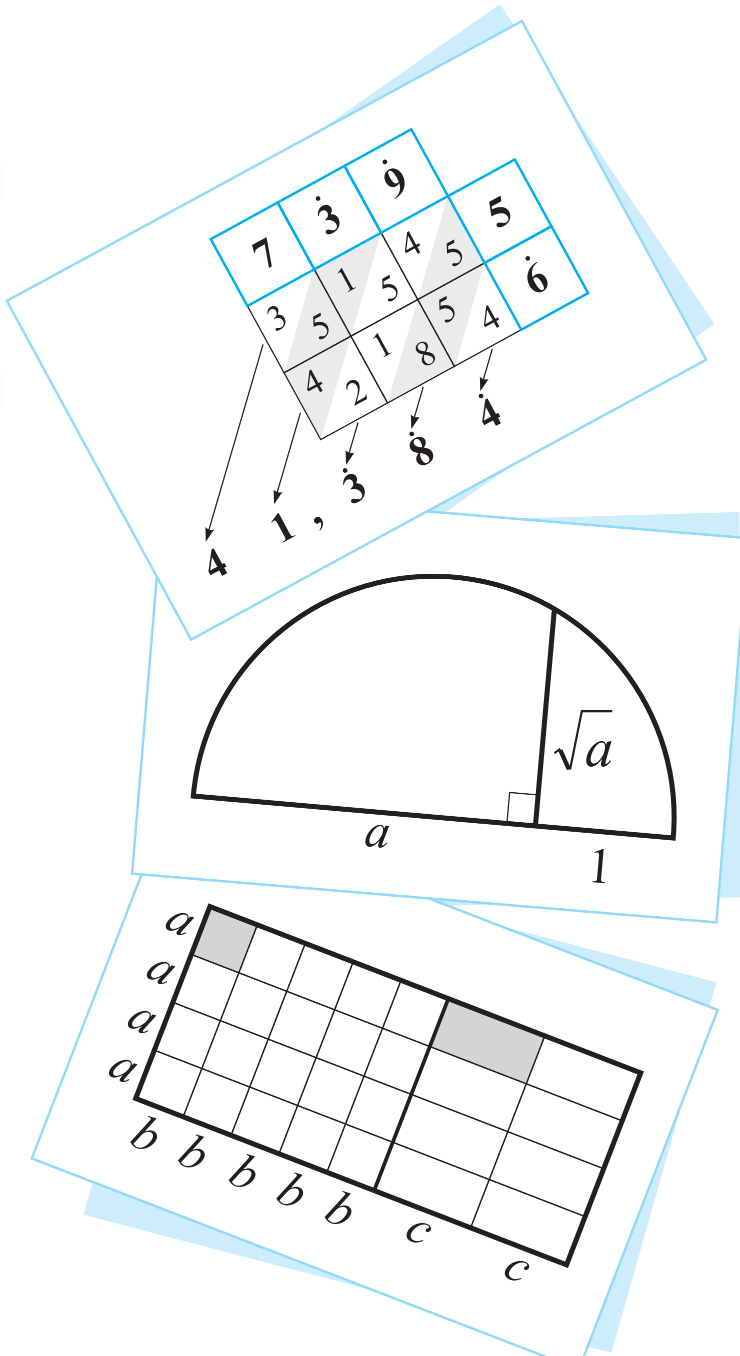
Акири, **Ион**

Математика: Учебник для 7-го класса / Ион Акири, Андрей Брайков, Ольга Шпунтенко; comisia de evaluare: Dorin Afanas [et al.]; traducere din limba română: Antonina Erhan; Министерство образования, культуры и исследований Республики Молдова. – Издание 2-е. – Chişinău: Cartdidact, 2018 (Tipografia Centrală). – 232 p.

ISBN 978-9975-3180-9-9

51(075.3)
A 16

АЛГЕБРА



ГЛАВА **1**

Повторение и дополнения

§1. Множество рациональных чисел

1.1. Рациональные числа. Виды записи

1 а) Выберите числа, соответствующие первой корзине, затем из оставшихся отберите числа, соответствующие второй корзине. Подходят ли оставшиеся числа третьей корзине?

$-8\frac{1}{2}$ $0,3$ -3 7 $3,5$ 4 $2,8(7)$ -2 $5,6$ $8,9$ 0 $\frac{2}{3}$ $1\frac{4}{5}$ 11 $-1,(3)$

б) Получим ли мы тот же результат, если сначала выберем числа, соответствующие третьей корзине? Почему?

- Любое рациональное число можно записать в виде $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, и $n \in \mathbb{N}^*$.
- $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

2 Рассмотрите образец и запишите в виде десятичного числа рациональные числа:

$2\frac{5}{6}$, $-4\frac{3}{5}$, $3\frac{2}{7}$, $1\frac{5}{8}$, $-\frac{5}{9}$, $3\frac{16}{99}$, $\frac{13}{45}$.

- $8\frac{3}{4} = ?$

I способ

$\frac{3}{4} = 3:4 = 0,75;\quad 8\frac{3}{4} = 8 + \frac{3}{4} = 8 + 0,75 = 8,75.$

II способ

$8\frac{3}{4} = \frac{8 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{35}{4} = 35:4 = 8,75.$

- $\frac{6}{7} = 6:7 = 0,857142857142... = 0,(857142).$

3 Рассмотрите образец и запишите рациональные числа в виде обыкновенной дроби:

$6{,}8;\quad -7,(12);\quad 3{,}5(24);$

$11{,}11;\quad 8,(76);\quad -0{,}2(134).$

- Любое рациональное число можно единственным образом представить в виде обыкновенной несократимой дроби.
- Любое рациональное число можно записать в виде десятичного числа.

$$-2{,}9 = -2\frac{9}{10}$$

число с чистым периодом

$$4,(53) = 4\frac{53}{99}$$

число со смешанным периодом

$$7{,}8(\underbrace{15}_{1+2=3}) = 7\frac{815-8}{\underbrace{990}_{2+1=3}} = 7\frac{807}{990}$$

1.2. Приближение и округление рациональных чисел

Выберите необходимое слово или цифру:

а) приближением числа 2,24651 с [недостатком/избытком] до [десятых/сотых] является число 2,3;

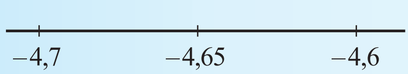
б) приближением числа 2,24651 с [недостатком/избытком] до [десятых/сотых] является число 2,24;

в) округлением числа 2,24651 до [десятых/сотых] является число 2,[2/3];

г) округлением числа 2,24651 до [десятых/сотых] является число 2,2[4/5];

д) округлением числа 2,24651 до [сотых/тысячных] является число 2,24[6/7].

- **Приближением с недостатком до десятых** (**ПНД**) положительного числа a является число, полученное в результате отбрасывания всех цифр, разряд которых меньше разряда десятых числа a.
  Пример: ПНД(3,19) = 3,1.
- **Приближением с избытком до десятых** (**ПИД**) положительного числа a является число, которое на 0,1 больше, чем приближение с недостатком до десятых числа a: ПИД = ПНД + 0,1.
  Пример: ПИД(3,19) = 3,2.
- **Приближением с недостатком (с избытком) отрицательного** числа a, является число, равное противоположному значению приближения с избытком (с недостатком) числа |a|.
- **Округлением до десятых** (**ОД**) числа a является число, равное одному из чисел ПНД или ПИД числа a, которое расположено на числовой оси ближе к a. Если число a является серединой отрезка [ПНД, ПИД], то округлением до десятых числа a является ПИД.



ПНД (4,65) = 4,6	ПНД (–4,65) = –4,7
ПИД (4,65) = 4,7	ПИД (–4,65) = –4,6
ОД (4,65) = 4,7	ОД (–4,65) = –4,6

Замечание. Приближения числа до целого, до сотых, до тысячных и т. д. и округления числа до целого, до сотых, до тысячных и т. д. осуществляются аналогично приближениям числа до десятых и округлению до десятых.

Примеры

Число а	7,28	–7,28	4,65	–4,65	14,92	–14,92
Приближение с недостатком до десятых числа а	7,2	–7,3	4,6	–4,7	14,9	–15
Приближение с избытком до десятых числа а	7,3	–7,2	4,7	–4,6	15	–14,9
Округление до десятых числа а	7,3	–7,3	4,7	–4,6	14,9	–14,9

Упражнения и задачи

1. Выберите числа:
а) целые;
б) натуральные;
в) рациональные;
г) рациональные отрицательные.

$9{,}3$; $\frac{19}{5}$; $0{,}4$; 173; $12{,}9$; $-8{,}(1)$; $-7{,}1(2)$; $-3\frac{9}{14}$; 0; -17; $5{,}01$; 18; $7\frac{5}{11}$; $\frac{1}{99}$; -371; -46

2. Назовите три числа, которые:
а) принадлежат множеству $\mathbb{Z}$ и не принадлежат множеству $\mathbb{N}$;
б) принадлежат множествам $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$;
в) принадлежат множеству $\mathbb{Q}$ и не принадлежат множеству $\mathbb{Z}$;
г) принадлежат множествам $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$.

3. Найдите пары равных дробей:
а) $\frac{21}{14}$, $\frac{4}{18}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{8}{36}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{18}{24}$, $\frac{4}{8}$; б) $\frac{18}{27}$, $\frac{12}{16}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{20}{32}$, $\frac{60}{80}$, $\frac{16}{28}$, $\frac{64}{112}$.

4. Найдите пары равных чисел:
а) $\frac{5}{6}$; $1\frac{1}{5}$; $-\frac{12}{5}$; $0{,}8(3)$; $-2\frac{1}{5}$; $\frac{6}{5}$; $-2{,}4$; $-2{,}(2)$; $-\frac{20}{9}$; $-2{,}2$;
б) $\frac{3}{4}$; $-\frac{21}{24}$; $-0{,}75$; $1{,}(3)$; $0{,}75$; $\frac{7}{8}$; $\frac{4}{3}$; $0{,}875$; $-\frac{7}{8}$; $-\frac{6}{8}$.

5. Выберите числа:
а) с чистым периодом; б) со смешанным периодом.
$0{,}0(21)$; $-2431{,}49494949$; $4{,}(1234)$; $-0{,}722222$; $16{,}6363121212...$; $-3{,}(5)$; $-9{,}878787...$

6. Запишите в виде десятичного числа:
а) $\frac{2}{5}$, $\frac{16}{3}$, $-2\frac{3}{8}$, $1\frac{3}{7}$, $\frac{3}{16}$, $-\frac{4}{9}$, $\frac{25}{90}$, $-\frac{101}{90}$; б) $\frac{1}{8}$, $\frac{14}{9}$, $-3\frac{5}{6}$, $2\frac{5}{7}$, $\frac{7}{18}$, $-\frac{7}{9}$, $\frac{34}{900}$, $\frac{21}{990}$.

7. Запишите 4 дроби, равные числу: а) 0,6; б) 0,3; в) 2,4; г) 1,8.

8. Запишите числа в виде обыкновенной дроби:

а) 0,16; –3,14; 0,(8); –5,(7); 0,3(5); 8,21(6); –4,97(35);

б) –0,72; 5,36; –0,(42); –3,(18); 0,5(3); 12,3(45); –7,6(543).

9. Впишите цифры и/или поставьте скобки так, чтобы получить десятичное число:

а) с чистым периодом, б) со смешанным периодом.

3, □□4□; 0, □8□□□; –41,7□□□...;

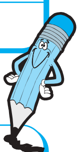
39, □27□□...; –6,3□1□□□...; 0, □9□4□□□...

10. Впишите такие цифры, чтобы полученное число можно было записать в виде десятичного числа: а) с чистым периодом; б) без периода; в) со смешанным периодом.

$\frac{13}{\square}$, $\frac{\square}{9\square}$, $\frac{\square}{3\square}$, $\frac{\square}{6}$, $\frac{7\square}{9\square}$, $\frac{34}{\square}$, $\frac{3\square}{3\square}$.

11. Перечертите и заполните таблицу:

Число	Приближение с недостатком			Приближение с избытком		
	до десятых	до сотых	до тысячных	до десятых	до сотых	до тысячных
0,3592						
–7,4157						
0,0735						
8,645						
–9,05						



12. Перечертите и заполните таблицу:

Число	Округление до:			
	единиц	десятых	сотых	тысячных
3,(54)				
6,2856				
0,3(56)				
–3,14285				

13. Длина отрезка равна 2 875 463 см. Преобразуйте эту длину в:
а) дециметры, округлив результат до единиц;
б) метры, округлив результат до десятых;
в) километры, округлив результат до тысячных.

14. Средняя масса одной горошины равна 220,6 мг. Найдите массу 100 горошин в:
а) граммах, округлив результат до десятых;
б) килограммах, округлив результат до тысячных.

15. *Магия чисел!*
Запишите в виде десятичного числа: $\frac{1}{81}, \frac{1}{891}, \frac{1}{8991}, \frac{1}{89991}$. Что вы заметили?

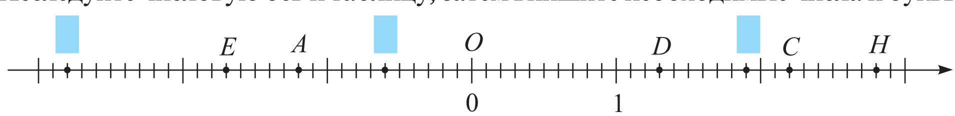
16. Найдите одно рациональное число, расположенное между числами:
а) 64,(98) и 65; б) $\frac{417}{500}$ и $\frac{418}{499}$.

17. При каких натуральных значениях n число $\frac{1}{n}$ является периодическим десятичным числом с чистым периодом, у которого:
а) одна цифра в периоде; б) две цифры в периоде?

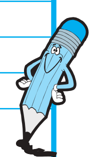
§2. Сравнение и упорядочивание рациональных чисел

2.1. Модуль рационального числа

Исследуйте числовую ось и таблицу, затем впишите необходимые числа и буквы.



Точка	Координата	Расстояние от точки до начала отсчета
A	–1,2	1,2
		0
	1,3	
E		
		$2\frac{4}{5}$
		2,2
	2,8	
	1,9	



Вспомним

Пусть a и b – рациональные числа. Расстояние от точки A(a) до начала отсчета называется **модулем** или **абсолютной величиной** числа a и обозначается $|a|$.

Значит, $|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a > 0 \\ 0, & \text{если } a = 0 \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$

Свойства модуля:

1° $|a| \geq 0$. 2° $|a| \geq a$. 3° $|ab| = |a| \cdot |b|$. 4° $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$.

• Заполните:

Если $x \in \{-3;\ 21{,}4;\ \frac{5}{9};\ -7{,}(8);\ 16{,}6;\ -5{,}(5)\}$, то $|x| \in \{$ ____ $\}$.

2.2. Сравнение и упорядочивание рациональных чисел

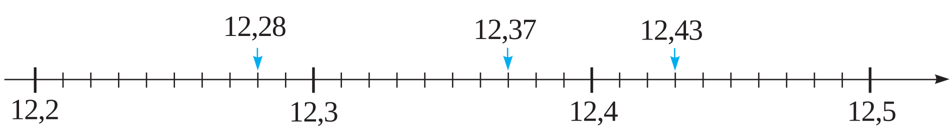
1 Рассмотрите таблицу и скажите, в какой день был наименьший курс доллара.

	1 $	1 €
Понедельник	12,37 лея	16,54 лея
Вторник	12,28 лея	16,57 лея
Среда	12,43 лея	16,48 лея

Решение:

I способ

Отметим числа 12,37; 12,28; 12,43 на числовой оси:



____ < 12,37 < ____

II способ

1 *шаг*

Сравниваем десятки:

12,37
12,28
12,43

Одно и то же число десятков

2 *шаг*

Сравниваем единицы:

1**2**,37
1**2**,28
1**2**,43

Одно и то же число единиц

3 *шаг*

Сравниваем десятые:

12,**3**7
12,**2**8
12,**4**3

2 < 3 < 4

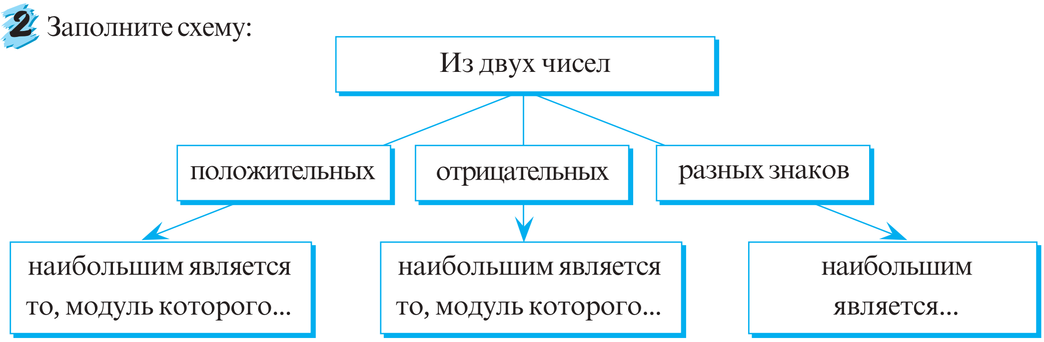
____ < 12,37 < ____

Ответ: ____ .

Из двух чисел, изображенных на числовой оси, больше то число, которое расположено правее.

• Рассмотрите таблицу предыдущей задачи и скажите, в какой день был наибольший курс евро.

2 Заполните схему:



3 Запишите имена участников соревнования в беге на 200 м в порядке убывания их результатов:

Имя	*Время* (*сек.*)
Михаил	18,39
Петр	18,42
Степан	18,37
Раду	17,98
Иван	18,05
Виктор	18,47

4 Рассмотрите и дополните:

$>$ $=$ $<$

$$\frac{5}{9} \;\bigcirc\; \frac{4}{9}$$
$$\uparrow$$
$$5 > 4$$

$$^{7)}\frac{1}{3} \;\bigcirc\; {}^{3)}\frac{2}{7}$$
$$\uparrow$$
$$\frac{1\cdot 7}{21} \;\bigcirc\; \frac{2\cdot \square}{21}$$
$$\uparrow$$
$$7 \;\bigcirc\; \square$$

$$^{4)}\frac{7}{12} \;\bigcirc\; {}^{\square)}\frac{9}{16}$$
$$\uparrow$$
$$\frac{7\cdot 4}{\square} \;\bigcirc\; \frac{9\cdot \square}{48}$$
$$\uparrow$$
$$28 \;\bigcirc\; \square$$

Упражнения и задачи

1. Найдите модуль числа: а) –12,9; б) $1\frac{3}{4}$; в) –71,(43); г) 19,5(83).
2. Дополните:

   а) если $a \in \left\{-17{,}8;\ 0;\ \frac{9}{11};\ -21{,}(4);\ -\frac{9}{11}\right\}$, то $|a| \in \{\quad\}$;

   б) если $a \in \{2{,}93;\ -3;\ \frac{15}{4};\ 7\frac{2}{3};\ -8\}$, то $|a| \in \{\quad\}$.
3. Отметьте на числовой оси точки, соответствующие числам, модуль которых:
   а) равен 2,5;
   б) натуральное число, меньше 4;
   в) натуральное число, больше 3 и меньше 7.
4. Найдите x, если:

   а) $|x| = 18{,}1$; б) $-|x| = -2\frac{2}{7}$; в) $7 - |x| = 17$; г) $|x - 0{,}9| = 0{,}9$; д) $|x| = 0$.
5. Впишите один из знаков <, =, > так, чтобы получилось истинное высказывание.

   $>$ $=$ $<$

   а) $\frac{8}{15} \bigcirc \frac{7}{15}$; $-\frac{8}{15} \bigcirc -\frac{7}{15}$; $59{,}317 \bigcirc 59{,}238$; $\frac{3}{16} \bigcirc \frac{5}{18}$; $-1\frac{4}{9} \bigcirc -1{,}(4)$.

   б) $\frac{7}{3} \bigcirc \frac{7}{5}$; $-\frac{7}{3} \bigcirc -\frac{7}{5}$; $18{,}(7) \bigcirc 18{,}77$; $\frac{9}{10} \bigcirc -\frac{10}{9}$; $-\frac{9}{4} \bigcirc -3{,}25$.

6. Дополните:

а) если $|a| \in \left\{1{,}3;\ 4;\ 0{,}(3);\ 1\frac{1}{9};\ \frac{3}{5}\right\}$ и $a<0$, то $a \in \{\qquad\}$;

б) если $\left|\frac{a}{2}\right| \in \left\{1{,}7;\ \frac{1}{7};\ 2{,}3(4)\right\}$ и $a<0$, то $a \in \{\qquad\}$.

7. Найдите $|a|$, зная, что расстояние между точками $A(a)$ и $B(-a)$ равно 17,82.

8. *Истинно* или *ложно*?

а) Если $a \neq 0$, то $|a| = a$.

б) Если $|a| = -a$, то $a = 0$.

в) Если $a = b$, то $|a| = |b|$.

г) Если $|a| = |b|$, то $a = b$.

9. Определите число с наибольшим модулем:

а) $5\frac{3}{4}$; $-5{,}72$; $5{,}7(3)$; $-5{,}(7)$; $5\frac{5}{6}$;

б) $8{,}(8)$; $-8\frac{7}{9}$; $8{,}8(7)$; $8\frac{9}{11}$; $-\frac{71}{8}$.

10. Раскройте модуль:

а) $|x+5|$, если $x>1$;

б) $|x-3|$, если $x<2$;

в) $|7-x|$, если $x<-1$;

г) $|8-x|$, если $x>8$.

***Образец*:**
$|3-x|$, $x>4$.
Если $x>4$, то $3-x<0$.
Значит, $|3-x| = -(3-x) = x-3$.

11. *Истинно* или *ложно*?

а) Если $a>4$, то $-|a|-|-a|+2|a+1|-|3a-1|-3=-3a$.

б) Если $a<-4$, то $|a|+|-a|-4|a+2|+|3a|-8=a$.

12. Решите уравнение на множестве $\mathbb{Q}$:

а) $|x+3{,}5| = 7{,}3$;

б) $|18-x| = 3{,}24$;

в) $|3x+9| = -6$;

г) $|0{,}01x-0{,}02| = 0$.

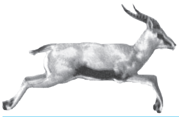
13. Найдите значение выражения:

а) $4|a-1|-6|b+1|+3$ при $a=-3$, $b=-0{,}5$;

б) $0{,}9|a+3|-3\frac{2}{5}|a+b|-9$ при $a=-4$, $b=5$.

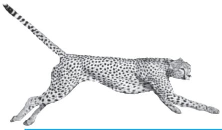
14. Отметив на числовой оси точки $A(-7{,}5)$, $Д\left(\frac{31}{6}\right)$, $И(-8{,}4)$, $К\left(-\frac{31}{4}\right)$, $Р(5)$, $Ш(-10)$, вы получите фамилию ученого, который в 1623 году изобрел первую счетную машину, способную складывать и вычитать. Запишите фамилию этого изобретателя.

15. У кого наибольшая скорость? А наименьшая?



Газель пробегает 5 км за 3 мин.

Кенгуру преодолевает 1 км за 2 мин.



Гепард пробегает 900 м за 30 сек.

Страус пробегает 2 км за 90 сек.

16. Сравните числа x и y, если:

а) $\dfrac{x}{y}=1{,}14$ и $x>0$; б) $\dfrac{x}{y}=1\dfrac{2}{5}$ и $x<0$;

в) $\dfrac{x}{y}=-0{,}91$ и $x>0$; г) $\dfrac{x}{y}=-0{,}83$ и $x<0$.

17. Запишите числа в порядке возрастания и выявите закономерность:

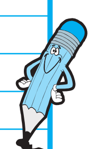
а) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{1+3}{2+4}$; б) $\dfrac{2}{5}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2+1}{5+3}$;

в) $\dfrac{2}{3}, 2, \dfrac{2+2}{3+1}$; г) $\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1+1}{4+5}$.

18. Примените закономерность, выявленную в предыдущем задании, и запишите три дроби, заключенные между дробями: а) $1\dfrac{1}{2}$ и $1\dfrac{2}{3}$; б) $5\dfrac{1}{4}$ и $5\dfrac{1}{3}$.

19. Перечертите и заполните таблицу (округлив до сотых). Запишите названия стран в порядке возрастания плотности их населения.

Страна	Площадь (км^2)	Количество жителей (млн)	Плотность населения $\left(\dfrac{\text{кол-во жит.}}{\text{км}^2}\right)$
Молдова	33 800	3,64	
Румыния	237 500	21,5	
Россия	17 075 000	141,83	
Украина	603 700	46,39	
Бельгия	30 500	10,63	
Франция	643 400	62	



Занимательная математика

20. Впишите такие 5 чисел, чтобы сумма всех этих чисел была положительной, а сумма любых трех соседних чисел была отрицательной.

§ 3. Действия над рациональными числами

3.1. Сложение и вычитание рациональных чисел

1 Рассмотрите и дополните:

а) $\frac{1}{7}+\frac{2}{3}=\frac{1\cdot 3}{21}+\frac{2\cdot 7}{21}=\frac{\square}{21}=\frac{\square}{\square}$;

б) $29{,}7163 + 483{,}56 = \square$;

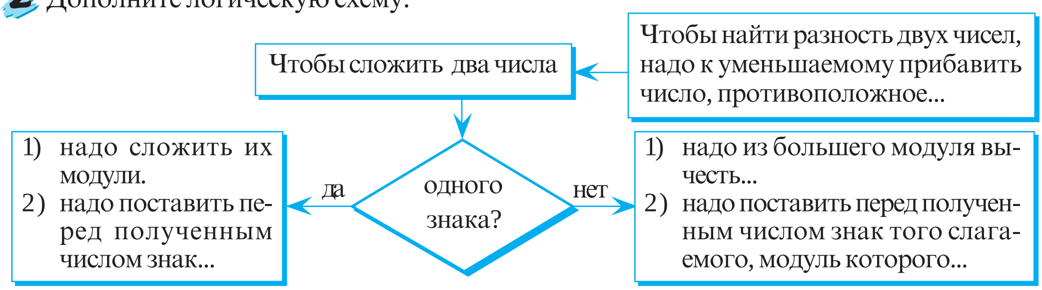
$$\begin{array}{r} 29{,}7163 \ + \\ 483{,}56\boxed{00} \\ \hline \square{,}2763 \end{array}$$

в) $-\frac{5}{6}+\frac{1}{3}=-\frac{5}{6}+\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}=\frac{-5+\square}{6}=-\frac{\square}{6}=-\frac{\square}{\square}$;

г) $-17{,}491-67{,}18=-17{,}491+(-67{,}18)=-(17{,}491+\square)=-\square$;

д) $\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{7}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\square}{7}=\frac{\square+\square}{14}=\frac{\square}{\square}$.

2 Дополните логическую схему:



3.2. Умножение и деление рациональных чисел

1 Рассмотрите и дополните:

а) $\frac{9}{10}\cdot\frac{2}{15}=\frac{9\cdot 2}{10\cdot 15}=\frac{3\cdot\square}{5\cdot 5}=\frac{\square}{\square}$;

б) $-4{,}12\cdot 3{,}8=-\square$;

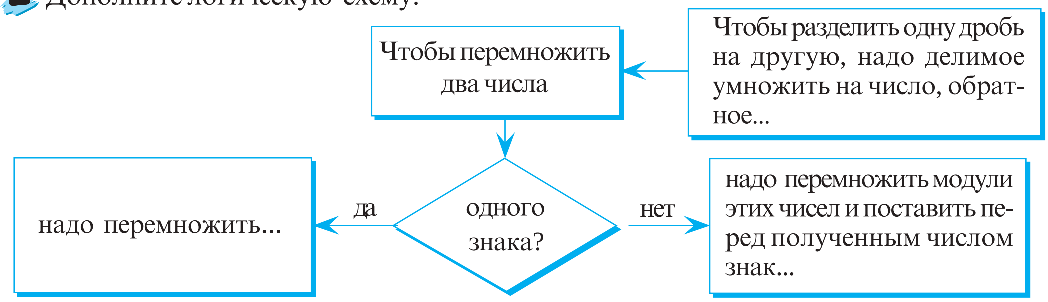
$$\begin{array}{r} 4{,}12 \ \text{ч} \\ 3{,}8 \\ \hline 3296 \\ 1236 \\ \hline \square{,}656 \end{array}$$

в) $\frac{3}{8}:\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{8}\cdot\left(-\frac{4}{\square}\right)=-\frac{3\cdot 4}{8\cdot\square}=-\frac{\square}{\square}$;

г) $-0{,}42:(-2{,}8)=-4{,}2:(-28)=\square$.

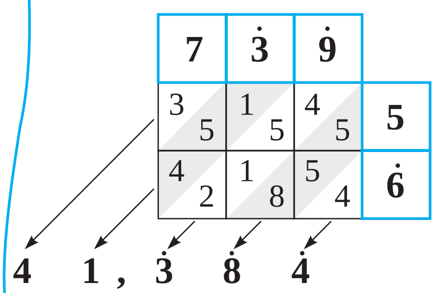
$$\begin{array}{r|l} 4{,}2 & 28 \\ \cline{2-2} -\underline{2\,8} & 0{,}1\square \\ 1\,4\,0 & \\ -\underline{\square} & \\ 0 & \end{array}$$

2 Дополните логическую схему:



Интересно и полезно

В XV веке в Италии был известен метод умножения чисел „решеткой“.
Например, чтобы выполнить умножение $7{,}39 \cdot 5{,}6$, поступали следующим образом:



① Записывали произведение каждой пары цифр в соответствующий квадрат решетки, причем десятки отделяли от единиц диагональной чертой.

② Складывали числа по каждой диагонали, записывая в результате цифру единиц, а цифру десятков прибавляли к следующей сумме.

③ Ставили запятую по известному правилу.

$7{,}39 \cdot 5{,}6 = 41{,}384$

3.3. Свойства арифметических действий над рациональными числами

• Дополните подходящим словом (*сложения* или *умножения*), так чтобы получилось истинное высказывание.

а) Действие ______ коммутативно.

б) Действие ______ ассоциативно.

в) Действие ______ дистрибутивно относительно ______.

г) Число 0 является нейтральным элементом ______.

д) Число 1 является нейтральным элементом ______.

Применяем

Используя свойства арифметических действий, вычислим сумму $301 + 302 + ... + 380$.

Объясняем

$$301 + 302 + ... + 380 = (301 + 380) + (302 + 379) + (303 + 378) + ... + (340 + 341) =$$
$$= \underbrace{681 + 681 + ... + 681}_{40\ \text{слагаемых}} = 40 \cdot 681 = 27240.$$

• Вычислите аналогично: а) $224 + 225 + ... + 399$; б) $110 + 111 + ... + 400$.

Упражнения и задачи

Выполните действия (1–7).

1. а) $\frac{5}{12}+\frac{9}{12}$; б) $\frac{4}{15}-\frac{7}{15}$; в) $\frac{2}{21}+\frac{1}{7}$;
   г) $\frac{3}{16}-\frac{9}{24}$; д) $-\frac{7}{9}+\frac{8}{10}$; е) $-\frac{11}{12}-1\frac{2}{5}$.

2. а) $18{,}349+26{,}945$; б) $3{,}647-8{,}55$; в) $-19{,}71+6{,}853$;
   г) $-6{,}42(8)+17{,}19$; д) $-5{,}009-8{,}(45)$; е) $12345{,}6789+98765{,}4321$.

3. а) $4\frac{1}{7}+2{,}72$; б) $15{,}94-15\frac{9}{11}$; в) $-2\frac{2}{3}+3{,}(7)$; г) $-8{,}0(8)-5\frac{7}{9}$.

4. а) $\frac{7}{8}\cdot\frac{2}{5}$; б) $\frac{36}{44}\cdot\frac{11}{12}$; в) $3\frac{12}{16}\cdot\frac{4}{10}$; г) $2\frac{1}{4}\cdot 1\frac{23}{45}$.

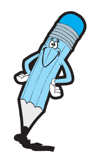
5. а) $\frac{7}{16}:\frac{9}{16}$; б) $-\frac{11}{28}:\frac{33}{56}$; в) $3\frac{3}{4}:\left(-2\frac{11}{12}\right)$; г) $(-24):\left(-5\frac{7}{13}\right)$.

6. а) $4{,}18\cdot 3{,}5$; б) $-6{,}04\cdot 2{,}95$; в) $1{,}23\cdot(-4{,}56)$; г) $-6{,}54\cdot(-3{,}21)$.

7. а) $1{,}962:0{,}9$; б) $-19{,}21:3{,}4$; в) $47\frac{17}{20}:(-6{,}38)$; г) $-64{,}8:\left(-6\frac{3}{4}\right)$.

8. Дополните таблицу рациональными числами так, чтобы сумма чисел по строкам, столбцам и диагоналям была одинаковой.

0,4	$\frac{9}{10}$	
	0,5	$\frac{7}{10}$
$\frac{4}{5}$		



9. Вычислите:

а) $\left[3{,}8(3)-2{,}(54)\cdot\frac{11}{28}\right]:2{,}(3)$;

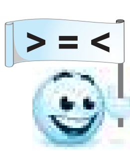
б) $[0{,}(5)+1{,}(75)+0{,}3(6)]:\left(\frac{1}{4}+2\frac{5}{13}+\frac{109}{156}\right)+0{,}19(60)$;

в) $123456{,}789\cdot 8+0{,}009-(12345{,}678\cdot 80+0{,}09)$;

г) $\left[0{,}278:13{,}9+(2-0{,}47):\frac{3}{20}\right]:102{,}2+3{,}4\cdot 1\frac{4}{17}$.

10. *Интересно и... опасно!*

Сравните и… НЕ делайте выводов:



а) $\frac{11}{7}+\frac{11}{4}$ ○ $\frac{11}{7}\cdot\frac{11}{4}$; $\frac{11}{8}+\frac{11}{3}$ ○ $\frac{11}{3}\cdot\frac{11}{8}$; $\frac{5}{2}+\frac{5}{3}$ ○ $\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{3}$;

б) $1\cdot\frac{1}{2}$ ○ $1-\frac{1}{2}$; $3\cdot\frac{3}{4}$ ○ $3-\frac{3}{4}$; $11\cdot\frac{11}{12}$ ○ $11-\frac{11}{12}$;

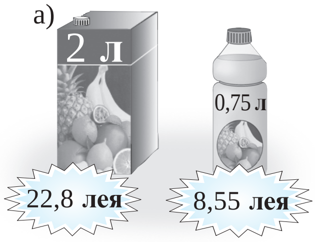
$5\cdot\frac{5}{6}$ ○ $5-\frac{5}{6}$; $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}$ ○ $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$.

11. Дополните:

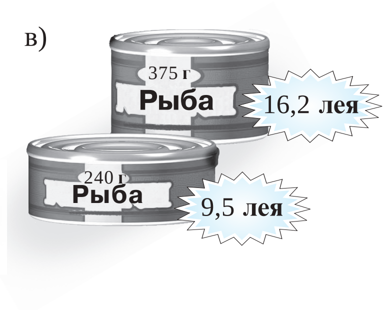
а) $2\frac{2}{5}$ м = ☐ см, $4\frac{1}{8}$ кг = ☐ г, $3\frac{5}{6}$ мин = ☐ сек;

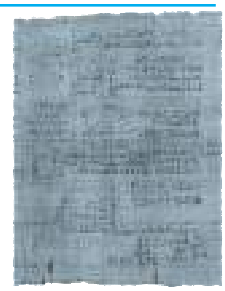
б) $9\frac{1}{4}$ т = ☐ кг, $\frac{4}{9}$ м = ☐ см, $7\frac{2}{3}$ ч = ☐ мин.

12. Что выгоднее купить?

а) 

б) 

в) 



13. Найдите 2012-й десятичный знак дроби $\frac{7}{11}$.

14. Папирус Ринда (около 1650 года до н. э.) содержит информацию о разложении обыкновенных дробей на элементарные дроби, например:

$$\frac{2}{73} = \frac{1}{60} + \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{x}.$$

Найдите знаменатель x последней элементарной дроби.

15. Какое число надо вычесть из числителя дроби $\frac{537}{463}$ и прибавить к знаменателю, чтобы получить дробь, равную дроби $\frac{1}{9}$?

16. Найдите наибольшую дробь, значение которой меньше 0,(3), если известно, что сумма ее числителя и знаменателя равна 101.

17. Найдите все положительные дроби, у которых числитель и знаменатель меньше 100 и которые можно „сократить” на одну и ту же цифру. Например: $\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$.

Занимательная математика

18. Сумма пяти чисел в каждой строке, столбце и по диагонали должна быть одна и та же. Для этого надо использовать три различных натуральных числа столько раз, сколько это необходимо. Какие это числа?

	7		27	13
6	20			32
22	23	16	9	10
				14
19	9	20		

§ 4. Степень рационального числа с натуральным показателем

1 Банк „Избанилеи“ предлагает 20 % годовых (проценты начисляются с ежегодной капитализацией) для открытия вклада на срок не менее 3 лет. Какая сумма денег будет на счету через 3 года, если положить на счет 625 леев? А через 4 года?

Рассуждаем

$$20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

Через 1 год	$625 + \frac{1}{5}\cdot 625 = 625\left(1+\frac{1}{5}\right) = 625\cdot\frac{6}{5} \leftarrow S_1$
Через 2 года	$S_1 + \frac{1}{5}\cdot S_1 = S_1\left(1+\frac{1}{5}\right) = 625\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)^2 = 625\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^2 \leftarrow S_2$
Через 3 года	$S_2 + \frac{1}{5}\cdot S_2 = S_2\left(1+\frac{1}{5}\right) = 625\cdot\left(1+\frac{1}{5}\right)^3 = 625\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^3$ (*леев*) $\leftarrow S_3$
Через 4 года	$\square$ (леев)

Считаем: $625\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^3 = 625\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{5} = 625\cdot\frac{216}{125} = 1080.$

$625\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^4 = \square$.

Ответ: 1080 леев; $\square$ леев.

Если $a \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, то $\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \text{множителей}} = a^n$

n — показатель степени
a^n — степень
a — основание степени

$a^0 = 1,\ a \neq 0;\quad a^1 = a;\quad 0^0$ не имеет смысла.

2 Вычислите и сделайте вывод:

а) $2^3\cdot 2^2 = 8\cdot 4 = 32 = 2^{\square}$;

б) $(2\cdot 5)^4 = 10^4 = \square = 2^4\cdot\square^4$;

в) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \square = \frac{\square^5}{3^5}$;

г) $\frac{4^5}{4^2} = \square = 4^{\square}$;

д) $(3^2)^3 = 9^3 = \square = 3^{\square} = 3^{2\cdot\square}$;

е) $(-1)^{10} = \square$;

ж) $(-1)^{15} = \square$.

Свойства степени

Для любых ненулевых рациональных чисел a, b и для любых натуральных чисел m и n, где $m \ge n$:

1°	$1^m = 1$	4°	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	7°	$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
2°	$(-1)^{2m} = 1$	5°	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	8°	$(a^m)^n = a^{mn}$
3°	$(-1)^{2m+1} = -1$	6°	$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$	9°	$\lvert a\rvert^2 = a^2$

• Сформулируйте словами свойства степени.

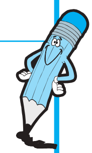
Упражнения и задачи

1. Вычислите:
   а) $\left(\frac{8}{11}\right)^2$; б) $\left(\frac{3}{4}\right)^3$; в) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$; г) $\left(-\frac{5}{6}\right)^3$; д) $\left(1\frac{6}{7}\right)^2$.
2. Вычислите:
   а) $2{,}3^2$; б) $(-0{,}5)^3$; в) $(-2{,}1)^4$; г) $13{,}72^0$; д) $\lvert -2\rvert^3$.
3. Дополните:
   а) $0{,}9^5 \cdot 0{,}9^3 = 0{,}9^{\square}$; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\square} \cdot \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^7$; в) $(-6{,}1)^{11} : 6{,}1^{10} = \square$;
   г) $\left(\frac{9}{25}\right)^{\square} : \left(\frac{3}{5}\right)^{\square} = \left(\frac{3}{5}\right)^3$; д) $\left\lvert -\frac{3}{5}\right\rvert^2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)^3 = -\left(\frac{3}{5}\right)^{\square}$.
4. Вычислите:
   а) $\left(1\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{7}{10}\right)^2 + \left(1\frac{1}{5} - \frac{7}{10}\right)^2$; б) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^6 : 0{,}5^{12} - \frac{1}{32}$.
5. Вычислите:
   а) 1^{2007}; б) $(-1)^{2007}$; в) 1^{44}; г) $(-1)^{44}$;
   д) $(-1)^3 \cdot (-1)^2 \cdot (-1)$; е) $(-1)^{15} \cdot 1^{27} \cdot (-1)^{32}$; ж) $\frac{(-1)^7}{(-1)^8}$; з) $((-1)^5)^{20}$.

6. Банк предлагает 10% годовых (проценты начисляются с ежегодной капитализацией) для открытия вклада.
   а) Какая сумма денег будет на счету через 3 года, если положить на счет 1 000 леев?
   б) Какая сумма денег будет на счету через 4 года, если положить на счет 5 000 леев?
7. Прямоугольную стену размером в 4,2 м × 6,72 м должны выложить керамической плиткой. Сколько плиток понадобится, если размеры одной плитки 28 см × 21 см (не учитывая расстояние между соседними плитками)?

8. Перечертите и дополните таблицу (округляя результат до сотых).

Фамилия, имя работника	Кол-во рабочих дней	Оплата за 1 рабочий день (леев)	Полис медицинского страхования 3,5 %	Подоходный налог 7 %	Соцстрах 6 %	Сумма к выдаче
Ион Морару	22	200				
Василий Олару	21	250				
Алина Албу	23	220				
Георгий Урсу	23	180				



9. Вычислите, применив свойства арифметических действий:

а) $(2{,}18\cdot 6{,}791+2{,}18\cdot 3{,}209)\cdot 3{,}14-1{,}8\cdot 3{,}14$;

б) $-9{,}25\cdot\dfrac{(16{,}2\cdot 3^2+16{,}2-28{,}8)\cdot 0{,}25}{9{,}25}$.

10. Найдите значение x:

а) $[(3^{10}\cdot 3^5)^2:81+3\cdot(9^3)^4]:x=3^{25}$; б) $\dfrac{2^{2007}}{4^{1004}}=\dfrac{x}{0{,}5}$.

11. Запишите данное число в виде произведения степеней с одинаковыми показателями (основание степени – натуральное число, не равное 1):

а) 1 000 000; б) 32 000 000; в) 24 300 000.

Образец: $144=3^2\cdot 4^2$.

12. Чему равна последняя цифра числа: а) 2^{2012}; б) 3^{2012}; в) 4^{2012} ?

13. Найдите натуральное число n из равенства $2^{2n}-4=3(4+4^2+\ldots+4^{2011})$.

14. *Большие числа!*

Один световой год – это расстояние, которое проходит световой луч за год.

а) Учитывая, что скорость света равна 298 000 км/с и в году в среднем 365,25 дня, вычислите длину светового года в километрах.

б) Ближайшей к Солнечной системе Галактикой является Туманность Андромеды, которая удалена на $2{,}25\cdot 10^6$ световых лет. Выразите это расстояние в километрах.

в) Ближайшей к Земле звездой является Проксима Центавра, которая расположена на расстоянии 4,2 светового года. Выразите это расстояние в километрах.

15. *Это интересно!*

Гугол – это самое большое число, которое имеет название.
Сколько цифр содержит число 0,125 гугла, если 1 гугол = 10^{100}?

§5. Решение уравнений на множестве рациональных чисел

1 Миша купил 60 долларов в валютной кассе. Чему равен курс доллара относительно молдавского лея, если, расплатившись банкнотой в 1000 леев, Миша получил сдачу 257 леев 20 банов?

257 леев 20 банов или 257,2 лея

Объясняем

Обозначим через x курс доллара, то есть цену одного доллара в леях. Получим

$$\boxed{60\cdot x+257{,}2=1000}$$

уравнение с неизвестным x

Решим уравнение:

$$\underbrace{60x}_{\text{стоимость долларов}} = 1\,000-257{,}2 \qquad x=\frac{\boxed{}}{60} \qquad \underbrace{x = \boxed{}}_{\text{цена долларов}}\ \text{(леев)}$$

Число ___ является **решением** уравнения $60x+257{,}2=1000$.

Ответ: ___ леев.

В процессе решения задачи мы от первоначального уравнения „перешли“ к другому уравнению, эквивалентному первоначальному.

- Значение неизвестного, при котором уравнение превращается в истинное равенство, называется **решением уравнения**.
- **Решить уравнение** – значит найти все его решения или доказать, что решений нет.
- Множество решений уравнения обозначают, как правило, через S.

Определение. Два уравнения называются ***равносильными*** (***эквивалентными***) ***уравнениями***, если множества их решений равны.

Между эквивалентными уравнениями ставится знак $\Leftrightarrow$ (читается: „равносильно“ или „эквивалентно“).

Следовательно, $60x+257{,}2=1000 \Leftrightarrow 60x=1000-257{,}2.$

2 Какие из следующих **свойств числовых равенств** были применены при решении уравнения?

Для любых рациональных чисел a, b, c, если $a=b$, то:

1° $a+c=b+c$ 2° $a-c=b-c$ 3° $a\cdot c=b\cdot c$ 4° $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$, где $c\neq 0$.

Замечание. Эти свойства используются для того, чтобы получить уравнения, эквивалентные данному.

3 Найдите пары эквивалентных уравнений:

Образец: $2x-9=3 \Leftrightarrow x-4{,}5=1{,}5$

$\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}=4$ $3x+3=15$ $22x=400$ $1{,}1x-1=3$ $4{,}5x=18$

$0{,}11x=2$ $x+1=5$ $4+\frac{2}{5}x=\frac{1}{5}$ $2x=-19$ $2x=21$

• Решите уравнение, для которого вы не нашли эквивалентное ему уравнение.

Упражнения и задачи

1. Какие из чисел -3; $\frac{4}{5}$; $2{,}04$; $-7{,}9$; 3 являются решениями уравнений:

   а) $3x-6=0{,}12$;　　　б) $-4x+3{,}2=0$;

   в) $5-0{,}4x=3{,}8$;　　　г) $\frac{2}{3}x=1{,}2^2-0{,}08$?

2. Решите уравнение на множестве рациональных чисел:

   а) $x-2{,}4=8$;　б) $x+3{,}6=0{,}5$;　в) $-x+8{,}2=6$;　г) $5-x=-11{,}7$;

   д) $-\frac{3}{4}x=3{,}12$;　е) $2{,}5x-7{,}2=1{,}8$;　ж) $2\frac{1}{3}x+0{,}08=1{,}2$;　з) $-5\frac{3}{5}x+0{,}48=-53$.

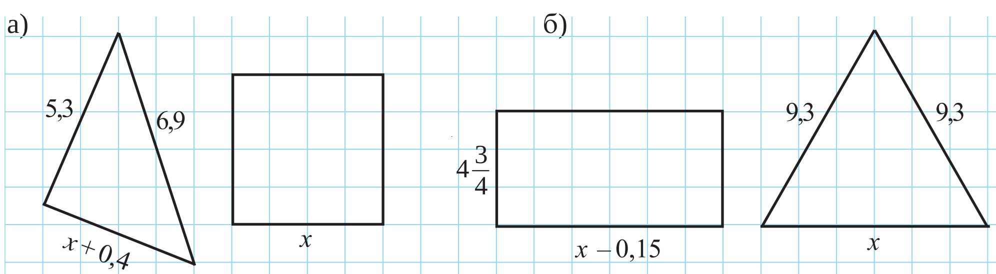
3. Чаши весов находятся в равновесии. В каждом мешочке одно и то же количество одинаковых шариков. Сколько шариков в каждом мешочке?

а)　　　　　　　　　　б)

4. Если некоторое число увеличить в 2,5 раза и из результата вычесть 0,2, то получим 2. Найдите это число.

5. Сумма некоторого числа и его четверти равна 24,25. Найдите это число.

6. Фигуры, изображенные на рисунке, имеют равные периметры. Найдите x.



7. Сколько стоит хлеб, если его цена составляет 1 лей 60 банов плюс половина цены хлеба?

8. Дополните так, чтобы число a являлось решением уравнения:

   а) $a=\frac{1}{3}$, $4x-\square=0{,}(3)$;　　　б) $a=-2{,}8$, $-\frac{2}{7}\cdot x+\square=1{,}6$;

   в) $a=1\frac{5}{6}$, $43{,}(18)-12x=\square$;　　　г) $a=12\frac{31}{37}$, $(x-\square)\cdot 7{,}5(6)=0$.

9. Если уменьшить длину стороны квадрата на 10 %, то его площадь уменьшится на 19 см². Найдите длину стороны квадрата.

10. С 1 апреля зарплата господина Копилкина увеличилась на 30 %. С его зарплаты удерживают: подоходный налог – 7 %, взносы по социальному страхованию – 6 %, медицинскую страховку – 3,5 %. Какую зарплату получал господин Копилкин до 1 апреля, если сейчас она составляет 4 342 лея?

11. Запишите 3 уравнения, эквивалентных на множестве $\mathbb{Q}$ уравнению:

а) $3x+9=12$; б) $-0{,}08x+2=-0{,}4$;

в) $\frac{2}{7}-\frac{4}{5}x=1$; г) $6x=-2,(7)$.

12. Решите на множестве $\mathbb{Q}$ уравнение:

а) $x^2=49$; б) $x^2=\frac{25}{81}$; в) $4x^2=\frac{9}{32}$;

г) $(x-3)^2=0{,}01$; д) $3x^2-0{,}7=-0{,}22$; е) $(5-x)^2+1{,}9=2{,}15$.

13. Точка A находится в два раза дальше от начала отсчета числовой оси, чем точка B. Найдите координаты точек A и B, если известно, что они расположены по разные стороны от начала отсчета и $AB=13{,}8$ (единиц). Сколько решений у этой задачи?

14. Точка A находится на числовой оси на 0,86 единиц ближе к началу отсчета, чем точка B. Найдите координаты точек A и B, если известно, что они расположены по разные стороны от начала отсчета и $AB=14{,}72$ (единиц). Сколько решений у этой задачи?

Задачи для чемпионов

15. Найдите цифры a и b, $a\neq b$, так чтобы $\overline{0,a(b)}=\frac{a}{b}$.

16. Пусть $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Докажите, что выражение n^5-5n^3+4n можно представить в виде произведения 5 последовательных натуральных чисел.

17. Найдите число $\overline{abcd}$, если $4\overline{abcd}=\overline{dcba}$.

18. Докажите, что если число $\overline{abcde}$ делится на 41, то и число $\overline{bcdea}$, также делится на 41.

19. Найдите последнюю цифру числа 3^{12345}.

20. Числа m и n являются натуральными. Вычислите значение выражения:

а) $(-1)^{m+n+m^2+n^2}$; б) $(-1)^{n+n^2+n^3+n^4}$.

Проверочная работа

Врямы выполнения работы: 45 минут

1 вариант

1. Расположите в порядке возрастания числа: **2б**

$$-7{,}1;\ |-7{,}2|;\ \frac{23}{3};\ 7{,}(2).$$

2. Вычислите: **2б**

а) $8\frac{1}{6}:2\frac{1}{3}$;

б) $(2{,}5+3)^2$;

в) $3\frac{3}{4}-1{,}25$.

3. Замените $\bigcirc$ подходящим знаком сравнения <, =, > так, чтобы получилось истинное высказывание: **2б**

$$72:6 \ \bigcirc\ \left|2{,}56-9\frac{1}{5}\right|.$$

4. Решите на множестве $\mathbb{Q}$ уравнение: **2б**

$$5\frac{2}{3}x-12=-2{,}5.$$

5. Двое рабочих выкопали ров длиной 126 м. Один из них выкопал на 12 м больше, чем второй. Сколько метров выкопал каждый рабочий? **2б**

2 вариант

1. Расположите в порядке возрастания числа:

$$-6{,}2;\ |-6{,}7|;\ \frac{33}{5};\ 6{,}(7).$$

2. Вычислите:

а) $5\frac{5}{6}:3\frac{1}{3}$;

б) $(4{,}5-3)^2$;

в) $5\frac{1}{4}-3{,}75$.

3. Замените $\bigcirc$ подходящим знаком сравнения <, =, > так, чтобы получилось истинное высказывание:

$$169:13 \ \bigcirc\ \left|15{,}24-2\frac{3}{5}\right|.$$

4. Решите на множестве $\mathbb{Q}$ уравнение:

$$7\frac{2}{5}x+15=-5{,}2.$$

5. Два ученика решили 98 задач. Один из них решил на 14 задач меньше, чем другой. Сколько задач решил каждый ученик?

ГЛАВА 2

Множество действительных чисел

§1. Иррациональные числа

1.1. Квадратный корень

1 Рассмотрите пример и дополните:

$3^2 = 9$, $\square^2 = 4$, $\square^2 = 25$, $\square^2 = 49$.

Определение. Неотрицательное число b называется ***квадратным корнем*** из неотрицательного числа a (или корнем из a), если $b^2 = a$.
Квадратный корень из неотрицательного числа a обозначается через $\sqrt{a}$.

Пример. Так как $4^2 = 16$, то квадратный корень из числа 16 равен 4.

Обозначаем: $\sqrt{16} = 4$.

2 Дополните:

а) Число 3 является квадратным корнем из числа 9, так как $\square = 9$.
Обозначаем $\sqrt{9} = \square$.

б) Число 2,1 является квадратным корнем из числа 4,41, так как $2{,}1^2 = \square$.
Обозначаем $\sqrt{\square} = 2{,}1$.

в) Число $\square$ является квадратным корнем из числа 0,09, так как $\square^2 = 0{,}09$.
Обозначаем $\sqrt{0{,}09} = \square$.

г) Число –3 не является квадратным корнем из какого-либо числа, так как $-3 < \square$.

д) $\sqrt{16 \cdot 81} = \sqrt{1296} = 36 = 4 \cdot 9 = \sqrt{16} \cdot \sqrt{\square}$.

е) $\sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{\square}{\square} = \dfrac{\sqrt{\square}}{\sqrt{\square}}$.

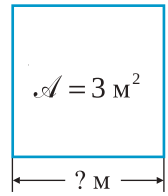
ж) $\sqrt{7^2} = \square$, $\sqrt{(-7)^2} = \square$.

Свойства квадратных корней

Для любых неотрицательных рациональных чисел a и b:

1° $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; 2° $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, где $b \neq 0$; 3° $\sqrt{a^2} = |a|$, где $a \in \mathbb{Q}$.

1.2. Понятие иррационального числа



Всезнайка предложил своему другу Многознайке найти точную длину стороны квадрата, площадь которого равна 3 м^2. Рассмотрите рассуждения Многознайки.

Объясняем

Обозначим длину стороны квадрата через x, где $x > 0$.

Тогда: $x \cdot x = 3$ или $x^2 = 3$.

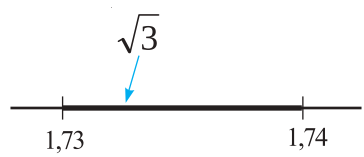
Значит, $x = \sqrt{3}$.

$\sqrt{3} = ?$

$$\overset{1}{1^2} < 3 < \overset{4}{2^2} \quad \rightarrow \quad 1 < \sqrt{3} < 2$$

$$\overset{2{,}89}{1{,}7^2} < 3 < \overset{3{,}24}{1{,}8^2} \quad \rightarrow \quad 1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$$

$$\overset{2{,}9929}{1{,}73^2} < 3 < \overset{3{,}0276}{1{,}74^2} \quad \rightarrow \quad 1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$$



Следовательно, длина стороны квадрата больше 1,73 м = 173 см и меньше 1,74 м = ______ см.

Странно! Не существует такого рационального числа, квадрат которого равен 3.

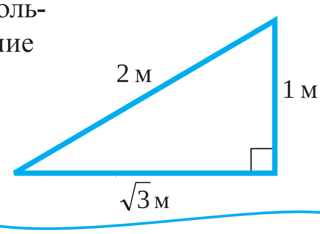
Действительно, число $\sqrt{3}$ не является рациональным, его невозможно записать в виде периодического десятичного числа. Следовательно, его нельзя записать в виде дроби. Оно является бесконечным непериодическим десятичным числом: $\sqrt{3} = 1{,}7320508...$ Число $\sqrt{3}$ является *иррациональным*.
Иррациональные числа, представленные в десятичном виде, имеют бесконечное количество десятичных знаков и не являются периодическими.

Иррациональное число невозможно записать в виде периодического десятичного числа (с чистым или смешанным периодом).
Иррациональное число невозможно записать в виде обыкновенной дроби.
Иррациональные числа – это числа, которые могут быть записаны в виде бесконечных непериодических десятичных чисел.
Множество иррациональных чисел обозначается буквой I.

Иррациональные числа не обязательно являются квадратными корнями. Например, иррациональное число 0,1234567891011... не является квадратным корнем какого-либо рационального числа. Число $\pi = 3{,}1415...$ также является иррациональным числом.

Интересно и полезно

Несмотря на то, что длина стороны квадрата, площадь которого равна $3\ м^2$, является иррациональным числом, стороны этого квадрата можно точно построить с помощью линейки и циркуля. Для этого сначала построим прямоугольный треугольник с катетом, равным 1 м, и гипотенузой 2 м. Длина другого катета треугольника равна $\sqrt{3}$ м. Этот факт следует из соотношения длин катетов (a, b) и длины гипотенузы (с) прямоугольного треугольника: $a^2+b^2=c^2$. Это соотношение называется *теоремой Пифагора*.



В нашем случае, $\underset{1}{\underset{\uparrow}{1^2}} + \underset{3}{\underset{\uparrow}{(\sqrt{3})^2}} = \underset{4}{\underset{\uparrow}{2^2}}$

1.3. Алгоритм извлечения квадратного корня из неотрицательного рационального числа

Вычислите квадратный корень из числа 1423,601 до второго десятичного знака включительно (т. е. с точностью до двух десятичных знаков).

Объясняем

① В записи числа выделяем справа и слева от запятой группы по две цифры.

$\sqrt{14\ 23{,}60\ 10}$

② Подбираем наибольшее однозначное число (3), квадрат которого не превосходит первое двузначное число из группы слева $(3^2<14)$. Записываем квадрат найденного числа (9) под числом 14. Под горизонтальной линией записываем его удвоенное число (6). Находим разность (5) и возле нее записываем цифры следующей группы.

$\sqrt{14\ 23{,}60\ 10}$ | 3
9 | 6
523

③ Подбираем однозначное число (7) так, чтобы произведение этого числа и двузначного числа, состоящего из подобранного числа и 6 (в разряде десятков), было меньше, чем 523. Записываем подобранное число (7) рядом с числом 3.
Записываем полученное произведение $67\cdot7=469$ под числом 523.
Находим разность (54) и возле нее записываем следующие две цифры.

$\sqrt{14\ 23{,}60\ 10}$ | 37
9 | $67\cdot7=469$
5 23
4 69
54 60

④ Так как эти цифры были расположены справа от запятой, то в ответе после числа 37 ставим запятую. Справа (под числом 67) записываем удвоенное число 37 и т. д., пока не получим искомое десятичное число с требуемой точностью.

Ответ: $\sqrt{1423{,}601} = 37{,}73...$

$\sqrt{1423{,}6010}$	37,73
9	$67 \cdot 7 = 469$
523	$747 \cdot 7 = 5229$
469	$7543 \cdot 3 = 22629$
5460	
5229	
23110	
22629	
481	

- Вычислите с точностью до 3 десятичных знаков длину стороны квадрата, площадь которого равна 3 м^2.

1.4. Приближение и округление иррациональных чисел

1 Найдите приближение числа $\sqrt{3}$ с точностью до сотых:

а) с недостатком; б) с избытком.

Объясняем

Применив калькулятор или алгоритм извлечения квадратного корня, получим десятичную запись числа $\sqrt{3}$.

$\sqrt{3} = 1{,}7320508...$

тысячные

сотые

десятые

Приближение с недостатком с точностью до сотых 1,73 → $1{,}73 + 0{,}01$ → Приближение с избытком с точностью до сотых 1,74

- Найдите приближение числа 0,123456789101112... сначала с недостатком, затем с избытком с точностью до тысячных.

2 Округлите до сотых числа $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$.

Объясняем

$\sqrt{3} = 1{,}7320508...$

Цифра тысячных: 2.

Так как $2 < 5$, округление числа 1,7320508... равно соответствующему приближению этого числа с недостатком.

$\sqrt{3} \approx 1{,}73$

$\sqrt{5} = 2{,}2360679...$

Цифра тысячных: 6.

Так как $6 > 5$, округление числа 2,2360679... равно соответствующему приближению этого числа с избытком.

$\sqrt{5} \approx 2{,}24$

Упражнения и задачи

Образец:
Так как $10^2 = 100$, следует, что $10 = \sqrt{100}$.

1. Дополните:
   а) $11 = \sqrt{\square}$; б) $0{,}8 = \sqrt{\square}$; в) $1\frac{1}{4} = \sqrt{\square}$;
   г) $0{,}01 = \sqrt{\square}$; д) $1{,}5 = \sqrt{\square}$; е) $4{,}(3) = \sqrt{\square}$.

2. Вычислите:
   а) $\sqrt{25}$; б) $\sqrt{0{,}04}$; в) $\sqrt{144}$; г) $\sqrt{81}$; д) $\sqrt{\frac{9}{4}}$;
   е) $\sqrt{\frac{16}{25}}$; ж) $\sqrt{4{,}5} \cdot \sqrt{2}$; з) $\sqrt{4 \cdot 9^2}$; и) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$.

3. Укажите, какие из данных чисел являются рациональными:
   а) $\sqrt{2}$; -4; $\sqrt{9}$; $-\sqrt{9}$; $\sqrt{24}$; 1,18; 0,1234567891011...; 3,(7); –5,0(2).
   б) $\frac{1}{4}$; $-\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{81}}$; $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$; $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$; $(\sqrt{5})^0$; $(\sqrt{3})^3$; $(-1)^{2007}$; $(-1)^6 \cdot (\sqrt{7})^4$.

4. Вычислите:
   а) $2{,}1^2$; б) $3{,}5^2$; в) $0{,}28^2$; г) $8{,}19^2$; д) $4{,}56^2$.

5. Запишите иррациональное число, заключенное между числами:
   а) 5 и 6; б) 7 и 8; в) -5 и -4; г) 0 и 1.

6. Решите на множестве $\mathbb{Q}$ уравнение:
   а) $x^2 = 9$; б) $x^2 = 25$; в) $x^2 = \frac{1}{4}$; г) $x^2 = 8$; д) $x^2 = -4$; е) $x^2 = 0$.

7. Выберите верный ответ:
   а) $\sqrt{2{,}89} = \square$; б) $\sqrt{15{,}21} = \square$; в) $\sqrt{0{,}1936} = \square$; г) $\sqrt{0{,}5184} = \square$.

а)			б)			в)			г)		
1,7	1,07	1,3	3,1	3,81	3,9	0,34	0,54	0,44	0,82	0,72	0,68

8. Не извлекая квадратный корень, сравните числа:
   а) $\sqrt{8}$ и 3; б) 9 и $\sqrt{90}$;
   в) 3,4 и $\sqrt{10}$; г) $\sqrt{19}$ и 4,5;
   д) $\sqrt{39}$ и 6,2.

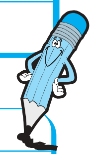
Образец:
$\sqrt{15} < 4$, так как $4 = \sqrt{16}$.

9. Применив алгоритм извлечения квадратного корня, вычислите:
   а) $\sqrt{549{,}9025}$; б) $\sqrt{326{,}8864}$; в) $\sqrt{7942{,}3744}$; г) $\sqrt{4912{,}6081}$.

10. Вычислите с точностью до двух десятичных знаков:
    а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{5}$; в) $\sqrt{7}$; г) $\sqrt{10}$.

11. Заполните таблицу.

Число a	Приближение с недостатком с точностью до			Приближение с избытком с точностью до		
	единиц	десятых	сотых	единиц	десятых	сотых
$\sqrt{6}=2{,}44948...$						
$\sqrt{14}=3{,}74165...$						
$\sqrt{21}=4{,}58257...$						
$\sqrt{19}=4{,}35889...$						



12. Заполните таблицу.

Число a	Округление числа a до			
	единиц	десятых	сотых	тысячных
12,345678...				
$-49{,}626226222...$				
$\sqrt{53}=7{,}2801098...$				
$\sqrt{0{,}6}=0{,}774596...$				

13. Возведите в квадрат число:

а) 0,(4); б) 0,(7); в) 7,(3);

г) 1,8(3); д) 0,2(6); е) –2,(45).

Образец:
$$1{,}(3)^2=\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{16}{9}=2{,}5(4)$$

14. Вычислите с точностью до 1 см длину стороны квадрата, площадь которого равна:

а) 2 м^2; б) 3 м^2; в) 2,4 м^2; г) 6 м^2.

15. Вычислите площадь квадрата со стороной, равной:

а) 4,(3) см; б) 2,(5) см; в) $\sqrt{8{,}7}$ см; г) $\sqrt{3{,}(7)}$ см.

16. Вычислите:

а) $\sqrt{0{,}(4)}$; б) $\sqrt{28{,}(4)}$; в) $\sqrt{2{,}(7)}$; г) $\sqrt{7{,}(1)}$; д) $\sqrt{53{,}(7)}$; е) $\sqrt{40{,}(1)}$.

Указание. Представьте в виде обыкновенной дроби число, записанное под знаком корня.

17. Вычислите: а) $\sqrt{0{,}32(1)}$; б) $\sqrt{0{,}58(7)}$.

Занимательная математика

18. Рассмотрите внимательно и дополните, не выполняя вычислений:

$\frac{1}{7}=0{,}(142857)$, $\frac{2}{7}=0{,}(285714)$, $\frac{3}{7}=0{,}(428\square 71)$,

$\frac{4}{7}=0{,}(57\square\square 28)$, $\frac{5}{7}=0{,}(71\square\square\square 5)$, $\frac{6}{7}=0{,}(85\square\square\square\square)$.

§ 2. Множество действительных чисел

2.1. Множество действительных чисел

Всезнайка предложил Многознайке назвать числовое множество, которому будут принадлежать все результаты арифметических действий, возведения в степень с натуральным показателем и извлечения квадратного корня из числа. Обратите внимание, как рассуждает Многознайка.

Объясняем

Множество рациональных чисел (то есть $\mathbb{Q}$) не удовлетворяет условию задачи, поскольку квадратный корень не всегда является рациональным числом. Например, $\sqrt{3}$ не является рациональным числом. На множестве иррациональных чисел (то есть I) не всегда результат операций, указанных выше, принадлежит множеству I. Например, числа $\sqrt{3}$ и $-\sqrt{3}$ – иррациональны, а их сумма равна 0 (рациональное число).

Среди множеств $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbf{I}$ нет множества с таким свойством.

Построим другое множество, применив операцию объединения:

$\boxed{\mathbb{Q} \cup \mathbf{I}}$ ← **Множество действительных чисел**, которое обозначается буквой $\mathbb{R}$.
Множество действительных чисел состоит из рациональных и иррациональных чисел.

Обозначения: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ← множество ненулевых действительных чисел;

$\mathbb{R}_-$ ← множество неположительных действительных чисел;

$\mathbb{R}_+$ ← множество неотрицательных действительных чисел;

$\mathbb{R}_-^* = \mathbb{R}_- \setminus \{0\}$ ← множество отрицательных действительных чисел;

$\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ ← множество положительных действительных чисел.

Ответ: Множество $\mathbb{R}$ удовлетворяет условию задачи.

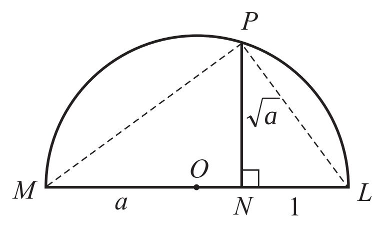
- Впишите одно из множеств $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbf{I}$, $\mathbb{R}$, чтобы полученное высказывание было истинным.

а) $\square \subset \mathbb{Z}$.　　б) $\square \setminus \mathbb{Q} = \mathbf{I}$.　　в) $\square \cap \square = \varnothing$.

г) $\square \subset \square \subset \square \subset \mathbb{R}$.　　д) $\square \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.　　е) $\mathbb{N} \cap \square = \mathbb{N}$.

Интересно и полезно

Леонардо да Винчи умел вычислять квадратный корень с помощью геометрических построений. Для того чтобы найти $\sqrt{a}$, он строил отрезок MN длины a и его продолжение – отрезок NL, длина которого равна 1.
Затем он строил полуокружность диаметра ML, а из точки N проводил перпендикуляр к ML, который пересекал полуокружность в точке P.



Получим $NP = \sqrt{a}$. Это равенство следует из так называемой **теоремы высоты** прямоугольного треугольника. Так как треугольник MPL – прямоугольный ($m(\angle MPL) = 90°$), то $NP^2 = MN \cdot NL$, или $NP = \sqrt{MN \cdot NL}$.

2.2. Сравнение и упорядочивание действительных чисел

1 Расположите в порядке возрастания числа $-\sqrt{7}$; 2,345...; $-2,(6)$.

Объясняем

$-\sqrt{7}$ и $-2,(6)$ — отрицательные числа; 2,345... — положительное число → Наибольшим является число

$-\sqrt{7}$ ○ $-2,(6)$

$\approx -2,65$ ○ $-2,66...$

$|-2,65| < |-2,66|$

(> = <)

При сравнении действительных чисел применяют те же правила и методы, что и при сравнении рациональных чисел.

Следовательно, ___ < ___ < 2,345...

- Сравните числа:

а) $\sqrt{9}$ и $\sqrt{16}$; б) $\sqrt{81}$ и $\sqrt{49}$; в) $\sqrt{5}$ и $\sqrt{3}$.

Сделайте вывод.

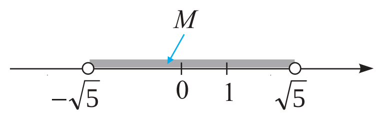
Если $a > b \geq 0$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

2 Изобразите на числовой оси множество:

а) $M = \{$ действительные числа больше, чем $-\sqrt{5}$, и меньше, чем $\sqrt{5}\}$;

б) $K = \{$ действительные числа, меньше либо равные $\sqrt{3}\}$.

Решение:

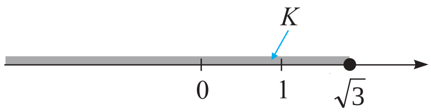


а) $\sqrt{5} \approx 2,24$. Числа $-\sqrt{5}$ и $\sqrt{5}$ расположены на одинаковом расстоянии от начала отсчета.

Числа, принадлежащие множеству M, расположены на числовой оси от начала отсчета на расстоянии, меньшем, чем $\sqrt{5}$.

Другая запись множества M: $M = \{x \mid |x| < \sqrt{5}\}$.

б)



- Два **действительных числа** называют **противоположными числами**, если они расположены на числовой оси на одинаковом расстоянии по разные стороны от начала отсчета.
- Модуль действительного числа обладает теми же свойствами, что и модуль рационального числа:

$$1^\circ \ |a| = \begin{cases} -a, & \text{если } a < 0 \\ 0, & \text{если } a = 0 \\ a, & \text{если } a > 0 \end{cases} \qquad 2^\circ \ |a|^2 = a^2. \qquad 3^\circ \ |-a| = |a|.$$

$$4^\circ \ |ab| = |a| \cdot |b|. \qquad 5^\circ \ |a:b| = |a|:|b|, \ b \neq 0.$$

3 Раскройте модуль: а) $|3-\sqrt{5}|$; б) $|\sqrt{2}-2|$.

Решение:

а) Найдем знак значения выражения $3-\sqrt{5}$.

Так как $\sqrt{5}\approx 2{,}24$ и $3>2{,}24$, то $3-\sqrt{5}>0$.

Итак, $|3-\sqrt{5}|=3-\sqrt{5}$.

Ответ: $3-\sqrt{5}$.

б) Найдем знак значения выражения $\sqrt{2}-2$.

Так как $\sqrt{2}\approx 1{,}41$ и $1{,}41<2$, то $\sqrt{2}-2<0$.

Итак, $|\sqrt{2}-2|=-(\sqrt{2}-2)=2-\sqrt{2}$.

Ответ: $2-\sqrt{2}$.

Упражнения и задачи

1. Укажите, какие из данных чисел являются:
   а) рациональными;
   б) иррациональными;
   в) действительными положительными;
   г) иррациональными отрицательными.

   0; $-2,(6)$; $-\frac{10}{11}$; $\sqrt{1{,}44}$; 21; $-\sqrt{81}$; $-\sqrt{33}$; $\frac{2}{\sqrt{3}}$; $\sqrt{12}$; $-\frac{5}{9}$; $17{,}82$; $\sqrt{0,(4)}$

2. Сравните числа:
   а) $-6{,}2345...$ и $0{,}1234...$; б) $\sqrt{71}$ и $-\sqrt{80}$; в) $-\sqrt{\frac{5}{6}}$ и 1;
   г) $\sqrt{2}+3$ и $-3\sqrt{2}$; д) $|-\sqrt{3}|$ и $\sqrt{2}+1$; е) $|-\sqrt{7}|$ и $|-2\sqrt{3}|$.

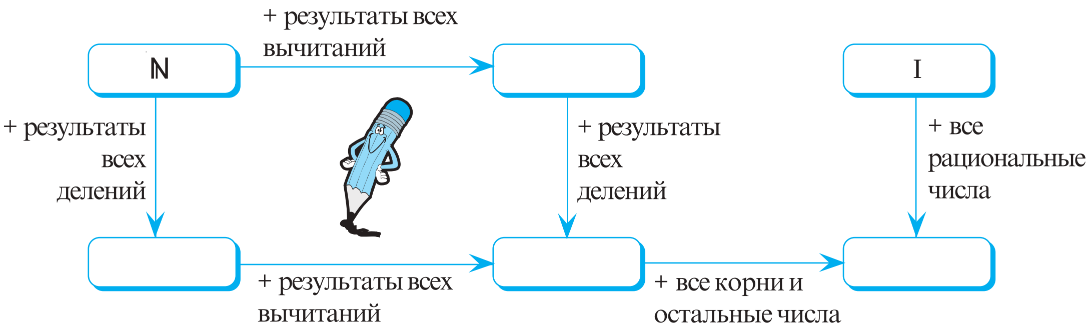
3. Найдите знак значения выражения:
   а) $\sqrt{17}-4$; б) $-7+\sqrt{47}$; в) $\frac{8}{9}-\sqrt{1{,}25}$; г) $\sqrt{10}-2\sqrt{5}$.

4. Найдите число, противоположное числу:
   а) $\sqrt{5}$; б) $\frac{\sqrt{7}}{7}$; в) $2-\sqrt{3}$; г) $-0,(2)$; д) $-\sqrt{2}+\frac{1}{3}$; е) $-6-2\sqrt{2}$?

5. Расположите в порядке возрастания числа:
   а) $3,(5)$; $-3\sqrt{5}$; $-5\sqrt{3}$. б) $\frac{4}{7}$; $\sqrt{\frac{4}{7}}$; $-\frac{7}{4}$.
   в) $4\frac{1}{2}$; $\left|-4\frac{2}{3}\right|$; $\sqrt{20}$. г) $-8\frac{1}{3}$; $-8{,}1(3)$; $-8{,}3(1)$.

6. Изобразите на числовой оси числа, которые:
   а) больше, чем $\sqrt{8}$; б) меньше, чем $2\sqrt{3}$;
   в) положительны и меньше, чем $5,(3)$; г) отрицательны и больше, чем $-4\frac{5}{9}$.

7. Рассмотрите схему и впишите в каждую рамку одно из множеств $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{R}$:



8. Запишите противоположные числа, которые расположены на числовой оси друг от друга на расстоянии:

а) $5\frac{5}{8}$; б) $3,(6)$; в) $4\sqrt{10}$; г) $2+\sqrt{20}$.

9. Раскройте модуль:

а) $|\sqrt{7}-4|$; б) $|9-\sqrt{80}|$; в) $|\sqrt{6}-2\sqrt{3}|$; г) $|-5+\sqrt{20}|$.

10. Изобразите на числовой оси действительные числа, которые:

а) меньше, чем $\frac{1}{3}$, и больше, чем $-0,5$; б) заключены между числами -3 и $\sqrt{3}$;

в) меньше, чем $\sqrt{8}$, и больше, чем -2; г) заключены между числами $-\sqrt{10}$ и $\sqrt{10}$.

11. Используя знак модуля и знаки сравнения, запишите аналитически:

а) число a заключено между числами $-\sqrt{6}$ и $\sqrt{6}$;

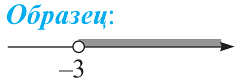
б) число b больше, чем $-\frac{1}{6}$, и меньше, чем $\frac{1}{6}$;

в) число c меньше, чем -3, либо больше, чем 3;

г) число d больше, чем 2,4, либо меньше, чем $-2,4$.

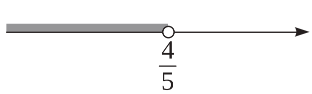
12. Известно, что число x принадлежит заштрихованному промежутку. Запишите, каким может быть значение x, используя знаки сравнения $<, \leq, >, \geq$:

Образец:

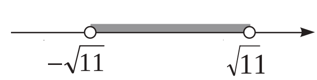


$x > -3$.

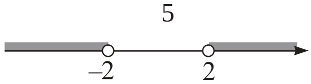
а)



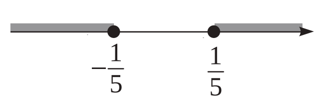
б)



в)



г)



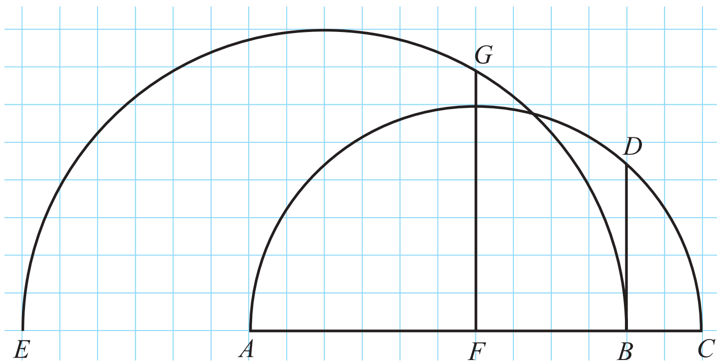
13. Сравните:

$>$ $=$ $<$

а) $\sqrt{2{,}1^2}$ и $|2{,}1|$; б) $\sqrt{\left(-\frac{2}{7}\right)^2}$ и $\left|-\frac{2}{7}\right|$;

в) $|-\sqrt{3}\cdot 2|$ и $|-\sqrt{3}|\cdot|2|$; г) $\frac{|-9|}{|-4|}$ и $\left|\frac{-9}{-4}\right|$.

14. Рассмотрите рисунок и найдите длину отрезка: а) BD; б) FG.
Примечание. Длина квадрата клеточки равна 0,5 см.
Указание. Смотрите на странице 30 рубрику ***Интересно и полезно!***.



15. Постройте в тетради (или на листе в клеточку) отрезок длиной:

а) $\sqrt{7}$ см; б) $\sqrt{5}$ см; в) $\sqrt{3{,}5}$ см; г) $\sqrt{5{,}5}$ см.

§ 3. Действия над действительными числами

3.1. Арифметические действия над действительными числами. Свойства

- Рассмотрите, вычислите, округляя до сотых, и дополните подходящими числами:

а) $\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{3}\approx \square$

$2\cdot\sqrt{3}+\sqrt{5}\approx 2\cdot 1{,}73+\square=\square$

$\approx 1{,}73$ $\approx 2{,}24$

Обозначаем: $a\cdot\sqrt{b}=a\sqrt{b}$.

Слагаемые $2\sqrt{7}$ и $5\sqrt{7}$ называются **подобными корнями**.

б) $2\cdot\sqrt{7}:\frac{1}{4}-5\cdot\sqrt{7}\approx\square$

$2\cdot\sqrt{7}\cdot\frac{4}{1}-5\sqrt{7}=8\cdot\sqrt{7}-5\sqrt{7}=\square\cdot\sqrt{7}\approx\square$

$\approx\square$

- Числа $a\sqrt{b}$ и $c\sqrt{b}$, где $a, c \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}_+$, называются ***подобными корнями***.
- При выполнении вычислений иррациональные числа округляют до рациональных чисел.
- При выполнении арифметических действий над действительными числами применяют те же правила и свойства, что и в случае выполнения арифметических действий над рациональными числами.

Свойства действий над действительными числами

Для любых действительных чисел a, b, c:

Сложение и умножение **коммутативны**.	$a+b=b+a$ $a\cdot b=b\cdot a$
Сложение и умножение **ассоциативны**.	$a+(b+c)=(a+b)+c$ $a\cdot(b\cdot c)=(ab)\cdot c$
Число 0 – **нейтральный** элемент сложения.	$a+0=0+a=a$
Число 1 – **нейтральный** элемент умножения.	$a\cdot 1=1\cdot a=a$
Для каждого действительного числа *a* существует единственное **противоположное** ему число –a.	$a+(-a)=(-a)+a=0$
Для каждого действительного числа *a* существует единственное **обратное** ему число $\frac{1}{a}$.	$a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1,\ a\neq 0.$
Умножение **дистрибутивно** относительно сложения и вычитания.	$a\cdot(b+c)=ab+ac$ $a(b-c)=ab-ac$

3.2. Степень действительного числа с натуральным показателем

Возведение в степень с натуральным показателем можно выполнить и на множестве действительных чисел, при этом данное действие обладает теми же свойствами, что и возведение рационального числа в степень с натуральным показателем.

Определение

Для любых $a \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$:

$$\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n \text{ множителей}} = a^n$$

показатель степени

степень

основание степени

$a^0=1,\ a\neq 0;\ \ a^1=a;\ \ 0^0$ не имеет смысла.

Например, 2^3 является степенью с основанием 2 и показателем степени 3.

Свойства степени с натуральным показателем

Для любых ненулевых действительных чисел a, b и для любых натуральных чисел m, n, где $m \geq n$:

1° $1^m=1$;

2° $(-1)^{2m}=1$;

3° $(-1)^{2m+1}=-1$;

4° $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$;

5° $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$;

6° $(a\cdot b)^m=a^m\cdot b^m$;

7° $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m=\dfrac{a^m}{b^m}$;

8° $(a^m)^n=a^{m\cdot n}$.

- Упростите выражение, применив свойства степени:

а) $4{,}13^5\cdot 4{,}13^8$; б) $(2\sqrt{11})^3:(\sqrt{11})^2$; в) $\dfrac{-0{,}39^2}{0{,}15^2}$; г) $\left(-\dfrac{14}{9}\right)^3\cdot\left(\dfrac{3}{7}\right)^3$.

3.3. Действия над корнями. Свойства

1 Найдите пары числовых выражений с одинаковыми значениями:

Если числа a, b являются действительными неотрицательными, то $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$

$4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{8}$ $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$ $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}}$ 8

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sqrt{6}$ $\sqrt{24}$ $\sqrt{8}$ $\sqrt{15}$ $\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$

Образец: $(\sqrt{3}\cdot\sqrt{5})^2 = (\sqrt{3})^2\cdot(\sqrt{5})^2 = 3\cdot 5 = \mathbf{15}$
$(\sqrt{15})^2 = \mathbf{15}$ $\rightarrow$ $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5} = \sqrt{15}.$

Свойства корней

Для любых неотрицательных действительных чисел a, b, c, d справедливы свойства:

1° $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{ab}.$

2° $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, где $b \neq 0.$

3° $(\sqrt{a})^2 = a.$

4° $\sqrt{a^2} = |a|$, где $a \in \mathbb{R}.$

2 Найдите пары числовых выражений с одинаковыми значениями:

$2\sqrt{10}$ $-7\sqrt{2}$ $\sqrt{(-8)^2\cdot 3}$ $\sqrt{75}$ $4\sqrt{5}$ $-3\sqrt{8}$

$\sqrt{16\cdot 5}$ $-\sqrt{72}$ $5\sqrt{3}$ $\sqrt{40}$ $-\sqrt{7^2\cdot 2}$ $-8\sqrt{3}$

Образец: $(3\sqrt{8})^2 = 3^2\cdot(\sqrt{8})^2 = 9\cdot 8 = \mathbf{72}$
$(\sqrt{72})^2 = \mathbf{72}$ $\rightarrow$ $3\sqrt{8} = \sqrt{72}$

Для любого действительного числа a и любого неотрицательного действительного числа b:

- $\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}$ ← Вынесение множителя из-под знака корня.
- $a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2 b}, & \text{если } a \geq 0, \\ -\sqrt{a^2 b}, & \text{если } a < 0. \end{cases}$ ← Внесение множителя под знак корня.

3.4. Порядок выполнения действий над действительными числами

Найдите значение числового выражения:

$$[\underset{⑥}{-}3\sqrt{5}\underset{④}{+}\,2^3\underset{⑤}{\cdot}(7\sqrt{5}\underset{③}{-}\underset{①}{\sqrt{9}}\underset{②}{\cdot}2\sqrt{5})]\underset{⑦}{:}5.$$

Объясняем

I. Выполняем действия в круглых скобках:

① $\sqrt{9}=3$

② $3\cdot 2\sqrt{5}=\square$

③ $7\sqrt{5}-\square=\square$

II. Выполняем действия в квадратных скобках:

④ $2^3=8$

⑤ $8\cdot\square=\square$

⑥ $-3\sqrt{5}+\square=\square$

III. Выполняем деление:

⑦ $\square:5=\square$

Ответ: $\square$

Порядок выполнения действий:
1. Действия в скобках (сначала во внутренних, затем во внешних).
2. Возведение в степень и извлечение квадратного корня.
3. Действия умножения и деления.
4. Действия сложения и вычитания.

Упражнения и задачи

1. Вычислите: а) $8{,}54-2{,}75$; б) $-0{,}189+4{,}793$; в) $3{,}17-2{,}4$; г) $6{,}37:1{,}3$.

2. Вычислите, округлив квадратный корень до десятых:
а) $\sqrt{7}+\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}-\sqrt{6}$; в) $2\sqrt{8}-0{,}3\sqrt{8}$; г) $\frac{1}{3}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

3. Рассмотрите карточки и продолжите последовательность подобных корней:
а) $\sqrt{8}$, ...
б) $-2\sqrt{5}$, ...
в) $\sqrt{0{,}3}$, ...
г) $7\sqrt{7}$, ...

$\sqrt{8}$ $\sqrt{5}$ $7\sqrt{7}$ $0{,}3\sqrt{5}$ $\sqrt{0{,}3}$ $7\sqrt{5}$ $2\sqrt{0{,}3}$ $-\sqrt{7}$ $0{,}4\sqrt{8}$ $-2\sqrt{5}$ $3\sqrt{8}$ $\frac{1}{4}\sqrt{8}$

4. Дополните подходящими числами:
а) $\sqrt{3}(8-\sqrt{2})=8\cdot\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot\square$; б) $\sqrt{7}+2\sqrt{3}=2\sqrt{3}+\square$;
в) $4-\sqrt{11}=-(\square-\square)$; г) $-\square+2\sqrt{5}=0$;
д) $1\cdot(2\sqrt{6}+1)=1+\square$; е) $4\sqrt{10}\cdot\frac{1}{\square}=1$.

5. Упростите выражение:

а) $4\sqrt{3}-7\sqrt{3}-2\sqrt{3}+6\sqrt{3}$;
б) $0{,}4\sqrt{6}+2\sqrt{6}-0{,}4\sqrt{6}+\sqrt{6}$;
в) $\frac{\sqrt{7}}{4}+\frac{\sqrt{7}}{3}-\frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{5\sqrt{7}}{12}$;
г) $0{,}8\sqrt{5}-\frac{4}{5}\sqrt{5}-\frac{1}{9}\sqrt{5}+1{,}(1)\sqrt{5}$.

6. Вычислите:

а) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$; б) $(-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{32})$; в) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}$; г) $\sqrt{5}\cdot|-\sqrt{45}|$.

7. Вычислите:

а) $\sqrt{24}:\sqrt{6}$; б) $(-\sqrt{343}):\sqrt{7}$; в) $\sqrt{180}:\sqrt{5}$; г) $\sqrt{363}:|-\sqrt{3}|$.

8. Упростите выражение, применив свойства степени:

а) $2{,}5^8\cdot 2{,}5^4$; б) $7{,}1^9:7{,}1^6$; в) $(\sqrt{5})^{11}:\sqrt{5}$;
г) $(\sqrt{7})^3\cdot 3\sqrt{7}$; д) $4{,}2^5\cdot 0{,}5^5$; е) $(\sqrt{18})^3:(\sqrt{2})^3$.

9. Применив формулы $(a^m)^n=a^{mn}$, $a\in\mathbb{R}$, $m, n\in\mathbb{N}^*$, и $(\sqrt{a})^2=a$, $a\in\mathbb{R}_+$, вычислите:

а) $(\sqrt{2})^6$; б) $(\sqrt{3})^4$; в) $(\sqrt{0{,}5})^4$; г) $(\sqrt{0{,}1})^8$.

10. Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{24}$; б) $\sqrt{63}$;
в) $\sqrt{98}$; г) $\sqrt{96}$;
д) $\sqrt{200}$; е) $\sqrt{108}$.

Образец:
$\sqrt{45}=\sqrt{9\cdot 5}=\sqrt{3^2\cdot 5}=3\sqrt{5}$.

11. Внесите множитель под знак корня:

а) $2\sqrt{3}$; б) $3\sqrt{2}$; в) $6\sqrt{5}$;
г) $-5\sqrt{6}$; д) $-4\sqrt{7}$; е) $7\sqrt{3}$.

Образец:
$-4\sqrt{8}=-\sqrt{4^2\cdot 8}=-\sqrt{128}$

12. Сравните:

а) $3\sqrt{2}$ и $2\sqrt{3}$; б) $-3\sqrt{5}$ и $-4\sqrt{3}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $\frac{\sqrt{5}}{5}$;
г) $\frac{2}{\sqrt{10}}$ и $\frac{4}{\sqrt{20}}$; д) $2\sqrt{3}+1$ и $\sqrt{3}+2$; е) $\sqrt{5}-2$ и $3\sqrt{5}-9$.

Указание. Для задач д) и е) учтите, что a > b если и только если a – b > 0, для любых $a, b\in\mathbb{R}$.

13. Вынесите множители из-под знака корня и упростите выражение:

а) $\sqrt{18}-3\sqrt{32}+2\sqrt{8}-\sqrt{72}$;
б) $0{,}4\sqrt{12}-0{,}9\sqrt{27}+1{,}3\sqrt{75}$;
в) $-2\sqrt{80}+\sqrt{320}-4\sqrt{20}+\sqrt{45}$;
г) $\sqrt{0{,}8}+\sqrt{3{,}2}+\sqrt{5}-10\sqrt{7{,}2}$.

14. Вычислите:

а) $4\sqrt{90}-\sqrt{10}-(3\sqrt{160}-5\sqrt{40})$;
б) $9\sqrt{27}+5\sqrt{24}-(-2\sqrt{96}-\sqrt{150}+3\sqrt{243})$;
в) $4\sqrt{84}-10\sqrt{189}-12\sqrt{1029}+2\sqrt{525}$;
г) $5\sqrt{243}+2\sqrt{48}-(8\sqrt{300}-6\sqrt{363})$.

15. Вычислите:

а) $3^3+\sqrt{25}[\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}-(5\sqrt{6})^2]-100$; б) $[2^5-(4\sqrt{3})^2]\cdot\frac{5}{12}\cdot(\sqrt{6}\cdot\sqrt{24}-2)+7^2$.

16. Найдите периметр равнобедренного треугольника, длина боковой стороны которого равна $12\sqrt{5}$ см, а длина основания на $\sqrt{20}$ см меньше, чем длина боковой стороны.

17. Найдите периметр прямоугольника, ширина которого равна $5\sqrt{12}$ см, а длина на $\sqrt{27}$ см больше ширины.

18. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $x^2-5=11$; б) $-3x^2+4=1{,}2$; в) $-\frac{5}{4}x^2=x^2$;

г) $(x+3)^2=-2$; д) $\sqrt{3}x^2-\sqrt{27}=0$; е) $\sqrt{5}x^2-5x=0$.

19. Упростите выражение:

а) $\sqrt{1584}-\sqrt{891}+\sqrt{176}-2\sqrt{175}$; б) $15\sqrt{1{,}04}-\frac{3}{4}\sqrt{5\frac{5}{9}}+6\sqrt{\frac{1}{18}}-(5\sqrt{0{,}02}-\sqrt{300})$;

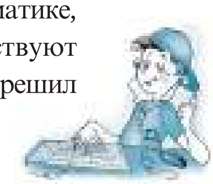
в) $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}-\sqrt{(\sqrt{11}+2\sqrt{5})^2}+\sqrt{(1-2\sqrt{11})^2}$.

20. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\sqrt{2-x}+|x-2y|+(z+3\sqrt{7})^2=0$.

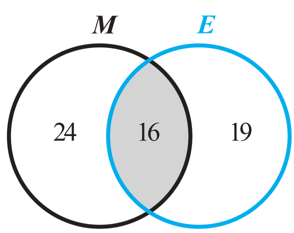
§4. Действия над множествами

4.1. Объединение, пересечение и разность множеств

1 Все учащиеся класса участвуют хотя бы в одном из конкурсов по математике или английскому языку: 24 записались на конкурс по математике, 19 – на конкурс по английскому языку. В обоих конкурсах участвуют 16 учащихся. Сколько всего учеников в классе? Рассмотрите, как решил задачу Всезнайка.



Решение:



M – множество учеников, записавшихся на конкурс по математике

E – множество учеников, записавшихся на конкурс по английскому языку

n – количество учеников класса

$n=24+19-16=27$.

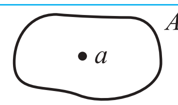
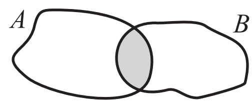
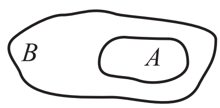
$$\text{card}\, A\cup B=\text{card}\, A+\text{card}\, B-\text{card}\, A\cap B$$

Ответ: 27 учащихся.

- Что означают в задаче обозначения $M\cup E$ и $M\cap E$?

2 Вспомним

Перечертите и дополните таблицу:

Обозначаем	*Читаем*	*Изображаем*	*Примеры*
$a \in A$	Элемент а принадлежит множеству А		$3 \in \mathbb{N}$
$a \notin A$			$-7{,}2 \notin \mathbb{Z}$
$A \cup B$	Множество А в объединении с множеством В		
$A \cap B$			$A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{3, 4, 5, 6\}$ $A \cap B = \{3, 4\}$
$A = B$			А – множество четных натуральных чисел $B = \{n \mid n = 2k,\ k \in \mathbb{N}\}$ $A = B$
$A \subset B$	Множество А является подмножеством множества В		А – множество фруктовых деревьев В – множество деревьев $A \subset B$
$A \setminus B$			

- а) Что означает обозначение $M \setminus E$ в задаче **1**? А обозначение $E \setminus M$?
  б) Вычислите $\mathrm{card}\, M \setminus E$ и $\mathrm{card}\, E \setminus M$.

> Число элементов множества А называется **кардиналом** множества А и обозначается card A.
> **Пустое множество** обозначается $\varnothing$ и его кардинал равен 0.

4.2. Декартово произведение двух множеств

1 Рассмотрите и заполните пропуски так, чтобы получить все возможные меню, состоящие из первого и второго блюд (в таком порядке).

А ***Первые блюда***

Борщ (Б)
Солянка (С)

$A = \{Б, С\}$

В ***Вторые блюда***

Шашлык (Ш)
Рыба (Р)
Голубцы (Г)

$B = \{Ш, Р, Г\}$

$$A \times B = \{(Б,\ Ш),\ (Б,\ Р),\ (Б,\ \square),\ (С,\ Ш),\ (\square),\ (\square)\}$$

Декартовым произведением двух множеств является множество, элементами которого являются все упорядоченные пары, в каждой из которых на первом месте записывается элемент первого множества, а на втором – элемент из второго множества. Декартово произведение множеств А и В обозначается $A\times B$. Значит, $A\times B=\{(x,\ y)\,|\ x\in A,\ y\in B\}$.

Замечания. 1. Множество $A\times B$ из задачи **1** является декартовым произведением множеств А и В.
2. Так как пары декартового произведения являются упорядоченными, то считается, что пары (a, b) и (b, a), – различны, где a и b принадлежат множествам А и В.

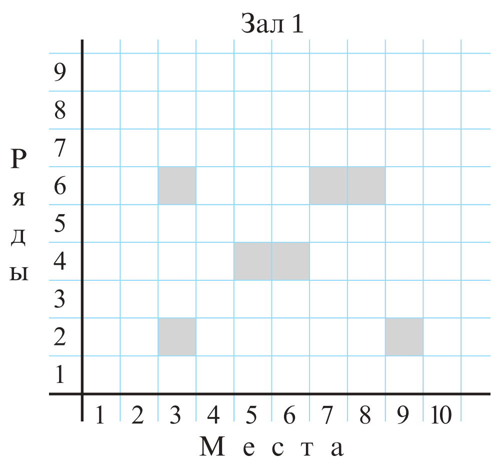
2 Рассмотрите рисунок. Пусть R – множество рядов, а L – множество мест произвольного ряда в зале кинотеатра.
Таким образом, $R=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ $L=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.
а) Что означает множество $L\times R$?
б) Дополните:

- Пусть O – множество занятых мест.

  Тогда $O=\{(3,\ 2),\ (9,\ 2),\ (\ \ \ \ ),$ $(\ \ \ \ ),\ (\ \ \ \ ),\ (\ \ \ \ ),\ (\ \ \ \ )\}$.

- card $L\times R$ = card ☐ · card ☐

- Обоснуйте устно, почему $(3,\ 2)\neq(2,\ 3)$.



- В общем, множества $A\times B$ и $B\times A$ могут быть разными.
- card $A\times B$ = card $A\cdot$ card B.

Упражнения и задачи

1. Найдите $A\cup B,\ A\cap B,\ A\setminus B,\ B\setminus A$, если:
   а) $A=\{-2,\ -5,\ 3,\ 7,\ 9\},\ B=\{-5,\ 3,\ 7,\ 9\}$;
   б) $A=\{a,\ b,\ m,\ n\},\ B=\{b,\ c,\ d,\ m,\ n,\ t\}$;
   в) $A=\{x\,|\,x\in\mathbb{Z},\,|x|<7\},\ B=\{x\,|\,x\in\mathbb{Z},\,|x|>2\}$;
   г) $A=\mathbb{N},\ B=\mathbb{Z}$.

2. Перечислите элементы множества:
   а) $A=\{x\,|\,x\in\mathbb{N},\ 2x<11\}$; б) $B=\{x\,|\,x\in\mathbb{Z},\,|2x|<17\}$; в) $C=\{x\,|\,x\in\mathbb{N},\ 24\,\vdots\,x\}$.

3. Дополните числами или символами так, чтобы получить истинное высказывание:

а) $\{\square, \square\} \subset \{1, 11, 21, 31, 41, 51\}$;

б) $\{-7, 9, 17\} \subset \{\square, \square, 9, 19, 27\}$;

в) $-3 \ \square \ \{x \mid x \in \mathbb{N}, |x| > 2\}$;

г) $\{10, 20, 30\} \ \square \ \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x \vdots 5\}$.

4. Запишите все подмножества множества $A = \{1, 2, ..., 6\}$, состоящие из 5 элементов.

5. Вычислите $\text{card}\, A \cup B$, если:

а) $\text{card}\, A = 12$, $\text{card}\, B = 17$, $\text{card}\, A \cap B = 4$;

б) $\text{card}\, A = 44$, $\text{card}\, B = 28$, $\text{card}\, A \cap B = 0$;

в) $\text{card}\, A = 9$, $\text{card}\, B = 19$, $\text{card}\, A \cap B = 9$.

6. Пусть A – множество месяцев, в которых 30 дней, B – множество месяцев, в которых 31 день. Сравните card A и card B.

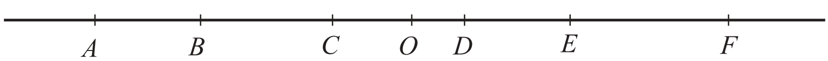
7. Пусть $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{5, b\}$. Запишите декартво произведение:

а) $X \times Y$; б) $Y \times X$; в) $X \times X$; г) $Y \times Y$.

8. Пусть A – множество прямоугольников, B – множество ромбов. Опишите элементы множества: а) $A \cap B$; б) A \ B; в) B \ A.

9. Рассмотрите рисунок, затем найдите:

а) $[AO] \cup [BE]$; б) $[BF] \cup [AC]$; в) $[BD] \cap [CF]$; г) $[CF] \cap [AB]$.



10. Напомним, что через D_n обозначается множество делителей числа n, а через M_n – множество чисел, кратных числу n. Найдите:

а) $D_{24} \cap D_{16}$; б) $D_{48} \cap M_3$; в) $D_{10} \cup D_{50}$; г) $D_{120} \setminus M_2$; д) $M_3 \cap M_5$.

11. Найдите числа m и n, если:

а) $\{m, 3, 5\} \cup \{3, 5, 6\} = \{2, 3, n, 6\}$;

б) $\{-6, m, 9, 10\} \cap \{-8, n, 16\} = \{-8, 9\}$;

в) $\{5, 6, ..., m\} \setminus \{1, 2, n, 13\} = \{6, 7, ..., 11\}$;

г) $\{m, 8, 9\} \cap \{3, 6, n\} = \{6, 9\}$.

12. Вычислите $\text{card}\, A \cap B$, если:

а) $\text{card}\, A = 33$, $\text{card}\, B = 16$, $\text{card}\, A \cup B = 40$;

б) $\text{card}\, A = 26$, $\text{card}\, B = 15$, $\text{card}\, A \cup B = 27$;

в) $\text{card}\, A = 14$, $\text{card}\, B = 23$, $\text{card}\, A \cup B = 37$.

$\text{card}\, A \cap B =$
$= \text{card}\, A + \text{card}\, B - \text{card}\, A \cup B$

13. Найдите A и B, если:

а) $A \cup B = \{1, 2, ..., 9)$, $A \setminus B = \{1, 3, 4\}$, $B \setminus A = \{5, 6, 7\}$;

б) $A \cap \{a, b, c\} = \varnothing$, $B \cap \{d, f, h\} = \varnothing$, $A \cap B = \{e, g\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$.

14. Найдите множества А и В, если:
а) $A \bigcup B = \{3, 4, 5\}$, $A \bigcap B = \{3, 5\}$, $B \setminus A = \varnothing$;
б) $A \bigcup B = \{a, b, c\}$, $A \bigcap B = \{a, b\}$, $A \setminus B = \{c\}$;
в) $A \bigcup B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $A \bigcap B = \{6, 7\}$, $A \setminus B = \{3, 4\}$.

15. Из 30 учеников класса 18 говорят на английском, 16 – на французском и один не знает этих языков. Сколько учеников говорят на двух языках?

16. Каждый ученик класса занимается хотя бы одним видом спорта: волейболом или легкой атлетикой. Сколько учеников в классе, если 14 из них играют в волейбол, 16 – предпочли легкую атлетику, а 5 – занимаются обоими видами спорта?

17. Учащиеся одного лицея знают хотя бы один из языков: латинский или греческий. 65% из них знают латинский язык, 75% – греческий язык. Какая часть учеников знает оба языка?

18. Запишите соотношение между множествами А и В, если:
а) А – множество чисел, кратных 9, а В – множество чисел, делящихся на 3;
б) А – множество чисел, кратных 2, а В – множество чисел, делящихся на 4;
в) А – множество чисел, кратных 10, а В – множество делителей числа 100?

19. В классе 30 человек. Каждому из детей нравится танцевать или петь. Известно, что 19 детей поют, а 18 танцуют. Скольким детям нравится и танцевать и петь?

20. На фирме работают 70 человек, из которых 48 знают английский язык, 35 – французский и 24 – оба языка. Сколько человек не знают ни английского, ни французского языков?

21. 65% кроликов, которых выращивает Миша, любят морковь, 20% обожают и морковь и капусту. Какая часть кроликов предпочитает капусту?

22. Из 400 опрошенных человек, 320 предпочитают пить чай, 210 – кофе, 150 – и чай и кофе. Сколько опрошенных человек не любят ни чай, ни кофе?

23. Сколько человек было опрошено, если известно, что 180 из них предпочитают в кинотеатрах смотреть боевики, 190 – драматические фильмы, 60 любят оба жанра, а 5 человек вообще не посещают кинотеатры?

24. Из 200 студентов факультета иностранных языков 170 говорят на английском языке, 160 – на французском, 150 – на испанском. Каждый из студентов знает хотя бы один из этих языков, но никто не говорит на двух языках. Сколько студентов говорят на 3 языках?

25. В лицее 600 учащихся. За I семестр по русскому языку 10 получили 280 учащихся, по математике – 240, по физическому воспитанию – 460, по русскому языку и математике – 80, по математике и физическому воспитанию – 100 учащихся. Сколько учащихся получили 10 по всем трем дисциплинам, если известно, что каждый из учащихся получил 10 хотя бы по одной из трех дисциплин?

Упражнения и задачи на повторение

1. Укажите, какие из данных чисел являются:
   а) рациональными;
   б) иррациональными;
   в) действительными отрицательными.

$\frac{19}{9}$; $\sqrt{16}$; $4\frac{3}{7}$; $7,11$; -24; $-\frac{5}{16}$; $4,(6)$; $-\sqrt{\frac{1}{3}}$; $-\sqrt{\frac{1}{4}}$; $0,001$; -660; $-5,1(3)$; $-3\sqrt{8}$; $9\sqrt{7}$

2. Вычислите:
   а) $(-3,8)^2$; б) $-4,5^2$; в) $\left(1\frac{1}{3}\right)^2$; г) $-\frac{6^2}{11}$; д) $\left(-\frac{3}{10}\right)^2$; е) $\left|-2\frac{1}{2}\right|^3$; ж) $|-3|^0$.

3. Вычислите:
   а) $\sqrt{121}$; б) $-\sqrt{2,56}$; в) $(\sqrt{1,7})^2$; г) $(-\sqrt{7,3})^2$; д) $\sqrt{0,0009}$; е) $\sqrt{(-12)^2}$.

4. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:
   а) $a^2=0,16$; б) $y^2=-0,04$; в) $x^2=1$; г) $-x^2=-2,89$; д) $y^2=\frac{1}{81}$.

5. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:
   а) $\sqrt{x}=2,5$; б) $\sqrt{y}=0,7$; в) $\sqrt{a}=-0,1$; г) $-\sqrt{x}=6,3$; д) $-\sqrt{y}=-1,8$.

6. Не извлекая квадратного корня, сравните:
   а) 8 и $\sqrt{80}$; б) 11 и $\sqrt{110}$; в) 9,9 и $\sqrt{99}$; г) 10,1 и $\sqrt{101}$.

7. Найдите знак значения выражения:
   а) $6-\sqrt{20}$; б) $\sqrt{0,9}-0,9$; в) $\sqrt{1,1}-1,1$; г) $\frac{7}{8}-\sqrt{\frac{7}{8}}$; д) $\frac{4}{3}-\sqrt{\frac{4}{3}}$.

8. Вычислите, округлив до десятых:
   а) $\sqrt{8}$; б) $\sqrt{11}$; в) $\sqrt{0,5}$; г) $\sqrt{2,4}$; д) $\sqrt{17,69}$.

9. Изобразите на числовой оси числа, которые:
   а) больше либо равны $-2,5$;
   б) меньше либо равны 3,8;
   в) заключены между числами $-\sqrt{6}$ и $2\sqrt{3}$;
   г) не заключены между 0,5 и $\sqrt{7}$.

10. Расположите в порядке убывания числа:
    а) $\sqrt{6}-6$; $6-\sqrt{6}$; $\frac{\sqrt{6}}{6}$; $-\frac{6}{\sqrt{6}}$; $6\frac{1}{6}$; $-6,(6)$; $6+\sqrt{6}$; $-6\sqrt{6}$;
    б) $5\sqrt{7}$; $-7\sqrt{5}$; $7\sqrt{5}$; $-5\sqrt{7}$; $\frac{5}{7}$; $-\frac{7}{5}$; $\frac{7}{5}$; $-\frac{5}{\sqrt{7}}$.

11. Вычислите:
    а) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$; б) $\sqrt{63}\cdot(-\sqrt{7})$; в) $\sqrt{3\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{1,2}$; г) $-\sqrt{\frac{2}{7}}\cdot\sqrt{3\frac{1}{2}}$;
    д) $-\sqrt{338}:\sqrt{98}$; е) $\frac{-\sqrt{7,5}}{-\sqrt{0,3}}$; ж) $\frac{\sqrt{12}\cdot\sqrt{21}}{\sqrt{7}}$; з) $\frac{\sqrt{5,4}}{\sqrt{9,6}}$.

12. Вынесите множитель из-под знака корня:
а) $\sqrt{90}$; б) $\sqrt{147}$; в) $\sqrt{132}$; г) $\sqrt{192}$; д) $\sqrt{588}$.

13. Внесите множитель под знак корня:
а) $3\sqrt{6}$; б) $6\sqrt{3}$; в) $9\sqrt{2}$; г) $5\sqrt{5}$; д) $8\sqrt{7}$; е) $7\sqrt{8}$.

14. Найдите длину отрезка AB (в единицах числовой оси), если:
а) $A\left(3\frac{1}{5}\right)$ и $B(2,(6))$; б) $A(-0,(8))$ и $B(0,0(8))$;
в) $A\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ и $B\left(-\frac{\sqrt{75}}{8}\right)$; г) $A\left(-9\frac{1}{3}\right)$ и $B(-3,(3))$.

15. Найдите периметр прямоугольника, измерения которого равны $\sqrt{80}$ см и $2\sqrt{45}$ см.

16. Найдите длину прямоугольника, площадь которого равна 36 см^2 и ширина $3\sqrt{3}$ см.

17. Найдите площадь прямоугольника, измерения которого равны $\sqrt{24}$ см и $2\sqrt{6}$ см.

18. Найдите наибольшее целое число, меньшее, чем:
а) $\frac{1+\sqrt{7}}{3}$; б) $\frac{2}{1-\sqrt{5}}$.

19. Найдите наименьшее целое число, большее, чем:
а) $\frac{9-\sqrt{8}}{7}$; б) $\frac{6}{\sqrt{5}+4}$.

20. Выполните действия:
а) $\left(\frac{2\sqrt{5}+1}{5}+\frac{2\sqrt{3}-1}{3}\right):\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$;
б) $\frac{5}{5\sqrt{6}+2\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{1}{5\sqrt{3}}+\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}-\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\right)$;
в) $\left(\sqrt{2}+5\sqrt{\frac{5}{24}}-3\sqrt{\frac{3}{40}}-4\sqrt{\frac{2}{15}}\right)\cdot\sqrt{2}$.

21. Вычислите:
а) $|5-\sqrt{5}|+|2-\sqrt{5}|-|\sqrt{20}-3|-|6-2\sqrt{5}|$; б) $\frac{|3\sqrt{3}-6|+\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}}{|\sqrt{3}-3|-1}$;
в) $2|3\sqrt{2}-2\sqrt{3}|+|3\sqrt{8}-8\sqrt{3}|+2\sqrt{12}$.

22. Упростите выражение:
а) $\frac{2-2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}-\sqrt{6}+\sqrt{10}}{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$; б) $\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(2-\sqrt{6}+\sqrt{7})-\sqrt{21}}{\sqrt{7}-1}$.

23. Найдите натуральное число n, если:

а) $3^n \cdot 3^8 = \dfrac{3^{21}}{\sqrt{3^{18}}}$; б) $2^5 \cdot 2^{n-1} = \dfrac{8 \cdot 4^3}{16^3} \cdot \sqrt{2^{20}}$.

24. Найдите число, которое на 25 % больше, чем удвоенное значение числа $(3\sqrt{147} - 2\sqrt{192} - \sqrt{75} + 1)$.

25. Найдите число, которое на 10 % меньше, чем четверть числа $(3\sqrt{80} + 4\sqrt{125} - 5\sqrt{180})^2$.

ЗАДАЧА ДЛЯ ЧЕМПИОНОВ

26. Обозначим $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Найдите, сколько множителей, равных 2, содержит разложение числа 2011! на простые множители.

Проверочная работа

Время выполнения работы: 45 минут

1 вариант

1. Даны числа: $-3{,}47;\ -\sqrt{16};\ \sqrt{8};\ 0{,}135791113\ldots;\ \dfrac{19}{5}$. Определите, какие из них иррациональные. **2 б**

2. Расположите в порядке возрастания числа: $2-\sqrt{3};\ 0;\ \sqrt{3}-2$. **2 б**

3. Упростите выражение: $8\sqrt{48} - 8\sqrt{80} + 5\sqrt{405} - 7\sqrt{147}$. **2 б**

4. Каждый ученик класса выполнил домашнее задание хотя бы по одной из дисциплин – математике, физике. Сколько всего учеников в классе, если 28 из них выполнили задание по математике, 26 – по физике, а 24 – по обеим дисциплинам? **2 б**

5. Какое число на 12,5 % меньше, чем сумма чисел $6\sqrt{32}$ и $4\sqrt{72}$? **2 б**

2 вариант

1. Даны числа: $2{,}89;\ -\sqrt{18};\ \sqrt{36};\ 0{,}24681012\ldots;\ -\dfrac{5}{19}$. Определите, какие из них иррациональные.

2. Расположите в порядке возрастания числа: $4-\sqrt{5};\ \sqrt{5}-4;\ 0$.

3. Упростите выражение: $-10\sqrt{125} + 2\sqrt{108} + 7\sqrt{192} - 3\sqrt{245}$.

4. Каждый ученик класса пообедал в школьной столовой. Сколько всего учеников в классе, если 16 из них съели первое блюдо, 22 – второе, а 10 – оба блюда?

5. Какое число на 8,5 % меньше, чем разность чисел $8\sqrt{75}$ и $5\sqrt{48}$?

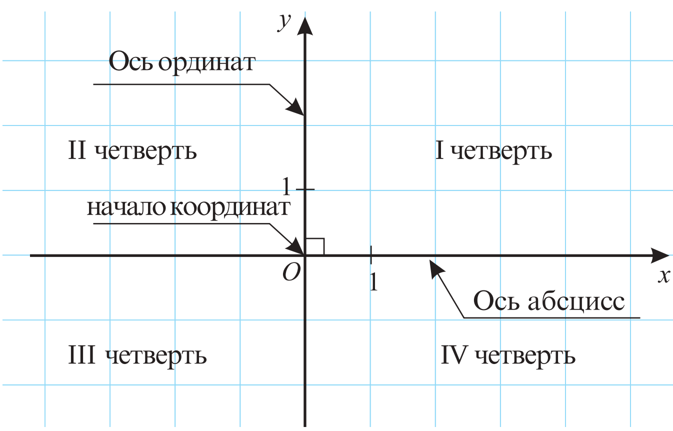
ГЛАВА 3

Функции

§1. Прямоугольная система координат

1 Действительные числа, то есть элементы меножества $\mathbb{R}$, можно представить на прямой, которая называется **числовой осью**.

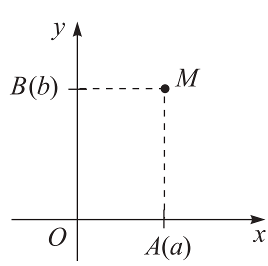
Для того чтобы представить элементы декартового произведения $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, нужны две перпендикулярные оси:



Прямоугольная система координат (или *декартова система координат*)

- Ось Ox называется **осью абсцисс**.
- Ось Oy называется **осью ординат**.
- Оси Ox и Oy перпендикулярны. Они делят плоскость на 4 части, называемые **координатными четвертями**.
- Точка O называется **началом** прямоугольной системы координат.
- Плоскость, на которой задана система координат, называется **координатной плоскостью**.

2 Как можно изобразить в прямоугольной системе координат пару (a, b) множества $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$?



Объясняем

① Отмечаем на оси Ox точку A(a).

② Отмечаем на оси Oy точку B(b).

③ Прямая, проходящая через точку A(a) параллельно Oy, пересекает прямую, проходящую через точку B(b) параллельно Ox, в некоторой точке. Обозначим эту точку через M.

④ Точка M является представлением пары (a, b) на координатной плоскости.

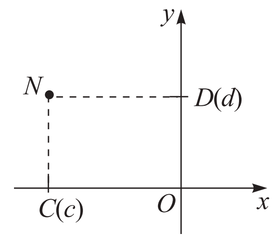
Обозначаем: M(a, b).

Читаем: Точка M с координатами (a, b).

Координата a называется **абсциссой** точки M (всегда пишется на первом месте), а b – **ординатой** точки M.

• Изобразите в прямоугольной системе координат пары: (4; 3); (–3; 2,5); (4; –6); (–2; –1).

3 Как определить координаты точки N в прямоугольной системе координат?



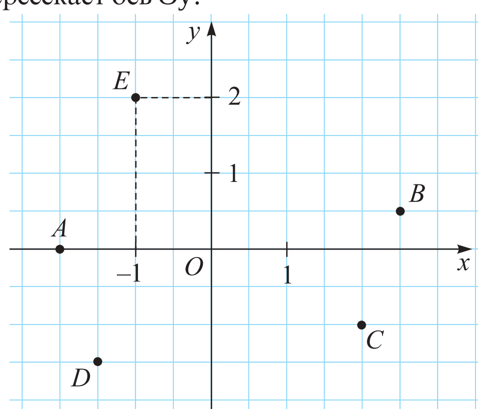
Объясняем

① Пусть C(c) – точка, в которой прямая, проходящая через точку N параллельно оси Oy, пересекает ось Ox.

② Пусть D(d) – точка, в которой прямая, проходящая через точку N параллельно оси Ox, пересекает ось Oy.

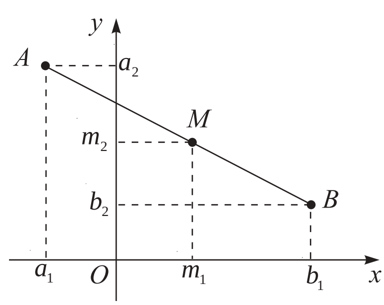
③ Пара (c, d) – координаты точки N.

• Найдите координаты точек, изображенных на рисунке:



Образец:
E(–1, 2)

4 Даны точки $A(a_1, a_2)$ и $B(b_1, b_2)$. Чему равны координаты середины отрезка AB?



Решаем

Пусть точка $M(m_1, m_2)$ – искомая точка. Тогда можно доказать, что m_1 является серединой отрезка $[a_1, b_1]$, а m_2 серединой отрезка $[a_2, b_2]$.

Таким образом, $m_1 - a_1 = b_1 - m_1$ или $m_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$.

$m_2 - b_2 = a_2 - m_2$ или $m_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$.

Ответ: $\left(\dfrac{a_1 + b_1}{2}, \dfrac{a_2 + b_2}{2}\right)$.

Пусть $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$. Тогда:

а) точка $M\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}, \dfrac{a_2+b_2}{2}\right)$ является серединой отрезка AB;

б) $AB=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$.

Упражняемся

Даны точки A(–4; 3), B(8; –2). Найдите:

а) координаты середины отрезка $[AB]$; б) длину отрезка AB.

Решаем

а) Пусть $M(m_1, m_2)$ – середина отрезка $[AB]$.

Тогда: $m_1=\dfrac{-4+8}{2}=2$; $m_2=\dfrac{3+(-2)}{2}=0{,}5$.

Ответ: M(2; 0,5).

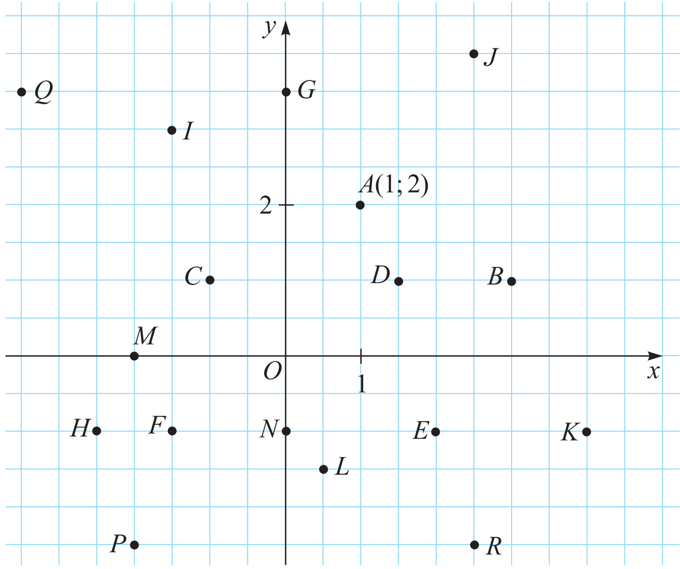
б) $AB=\sqrt{(-4-8)^2+(3-(-2))^2}=\sqrt{144+25}=13$.

Ответ: 13 единиц длины.

Упражнения и задачи

1. Начертите прямоугольную систему координат и отметьте на ней точки:
а) A(–4; 1); B(0,5; 3); C(7; –1,5); D(–2; –6);
б) M(3; 4,5); N(9, –2); K(–1; –8); P(–4; 7).

2. Рассмотрите рисунок. Найдите координаты точек:
а) B, C, D, E; б) F, G, H, I; в) J, K, L, M; г) N, P, Q, R.



3. На координатной плоскости начертите прямую, проходящую через точки A(–2; –1) и B(3; 1,5). Отметьте на прямой AB точки, абсциссы которых соответственно равны –1, 0, 1, 2. Найдите координаты этих точек.

4. На координатной плоскости начертите прямую, проходящую через точки M(–3; 4) и N(4,5; –1). Отметьте на прямой MN точки, ординаты которых соответственно равны 0, 1, 2, 3. Найдите координаты этих точек.

5. В какой четверти расположена точка A(a, b), если:
а) $a > 0,\ b > 0$; б) $a > 0,\ b < 0$; в) $a < 0,\ b > 0$; г) $a < 0,\ b < 0$?

6. Что можно сказать о точках, у которых:
а) абсцисса равна 2; б) ордината равна –4;
в) модуль абсциссы равен 3; г) модуль ординаты равен 5?

7. Найдите длину отрезка, один конец которого лежит в начале координат, а другим является точка:
а) A(4; 3); б) B(–7; –24); в) C(6; –8); г) D(–8; 15); д) E(20; 21).

8. Найдите координаты середины отрезка AB, если:
а) A(1; 3), B(3; 5); б) A(–2; 6), B(6; –2);
в) A(5; –2), B(–5; 8); г) A(–3; 7), B(–9; 11).

9. Зная, что O(0, 0) – середина отрезка AB, найдите координаты точки A, если:
а) B(3; –4); б) B(–12; 10); в) B(–6; –6); г) B(9; 2,5).

10. Найдите координаты вершин C и D, квадрата ABCD, если:
а) A(–3; 4), B(1, 4); б) A(2; –3), B(5, –3).

11. Найдите площадь прямоугольника ABCD, если:
а) A(4,5; –1), B(–3; –1) и C(–3; 5); б) A(–5; 1), B(3; 1) и C(3; –2).

12. Точки A и B равноудалены от оси ординат, а отрезок $[AB]$ перпендикулярен этой оси. Найдите координаты точки B, если точка A имеет координаты:
а) $(2; \sqrt{5})$; б) (–7,4; 4); в) (–0,6; –8,1); г) (13; –10).

13. Точки M и N равноудалены от оси абсцисс, а отрезок $[MN]$ перпендикулярен этой оси. Найдите координаты точки N, если точка M имеет координаты:
а) $\left(3\frac{1}{4};\ 4\right)$; б) (6; –5); в) (–0,35; 8); г) (–85; –58).

14. Вычислите площадь треугольника ABC, если:
а) A(2; 6), B(2; –1), C(8; –1); б) A(–2; 4), B(–2; –5), C(10; 4).
Указание. Дополните треугольник до прямоугольника.

§ 2. Понятие функции

2.1. Функциональные зависимости. Функции

1 В таблице даны размеры женской одежды, используемые в Европе, и соответствующие им размеры, используемые в США. Задайте аналитически соответствие между этими двумя множествами размеров.

E

Европа	36	38	40	42	44	46	48
США	10	12	14	16	18	20	22

A

Объясняем

Так как каждому элементу m, $m \in E$, соответствует элемент $n = m - 26$, где $n \in A$, то можно задать множество A следующим образом: $A = \{m - 26 \mid m \in E\}$.

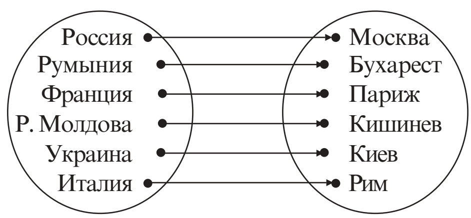
2 Определите соответствие между множеством T = { Республика Молдова, Румыния, Россия, Украина, Франция, Италия} и C = { Бухарест, Москва, Киев, Рим, Кишинев, Париж}.

Объясняем

Способ I. Зададим соответствие с помощью таблицы:

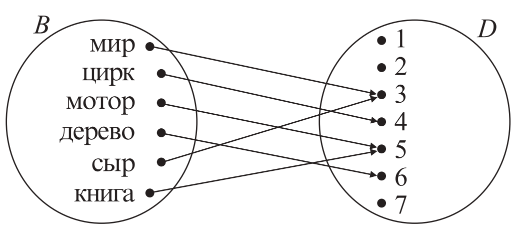
T	Р. Молдова	Румыния	Россия	Украина	Франция	Италия
C	Кишинев	Бухарест	Москва	Киев	Париж	Рим

Способ II. Зададим соответствие с помощью диаграммы:



3 Представьте с помощью диаграммы взаимосвязь между множествами B = { мир, цирк, мотор, дерево, сыр, книга} и D = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} так, чтобы каждому слову (элементу) множества B соответствовало количество букв этого слова.

Решение:



Соответствия (зависимости), рассмотренные в задачах **1**, **2** и **3**, называются **функциональными зависимостями**.

Определение. Пусть X и Y – два ненулевых множества (конечные или бесконечные). Правило, которое каждому элементу множества X ставит в соответствие единственный элемент множества Y, называется **функцией, определенной на множестве** X **со значениями в множестве** Y (или **функцией из** X **в** Y).

Обозначение $f\colon X \to Y$ читают как „функция f из X в Y“ или „функция f, определенная на множестве X со значениями в множестве Y“.

Таким образом, в задачах **1**, **2** и **3** можно определить функции $f\colon E \to A$, $g\colon T \to C$, $h\colon B \to D$.

- Рассмотрите названия элементов функции.

Элементы функции

$f\colon X \to Y$

Правило (закон) соответствия

Область значений функции

Область определения функции (обозначается D(f))

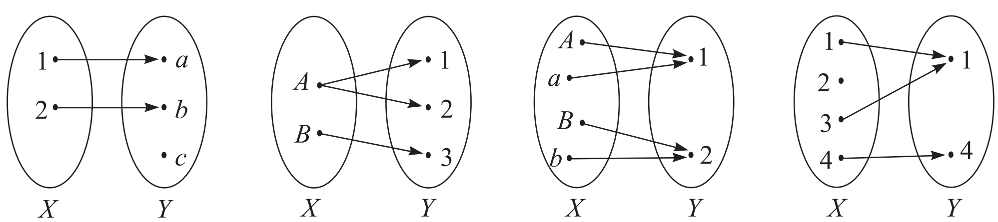
Пусть дана функция $f\colon X \to Y$ и x – произвольный элемент множества X. Если $y \in Y$ и функция f ставит в соответствие элементу x элемент y, то говорят, что x – **аргумент** (или **независимая переменная**) **функции**, а y – **значение функции** f **в точке** x.
Обозначают $y = f(x)$ и читают как „ игрек равен эф от икс“.

Например, значение функции $h\colon B \to D$, заданной в задаче **3**, в точке „цирк” равно 4, то есть h(цирк) = 4.

Множество $E(f)=\{y \mid y=f(x),\ x \in X\}$ называется **множеством значений функции** f. Очевидно, что $E(f)$ – подмножество множества Y. Например, $E(h)=\{3, 4, 5, 6\}$ является подмножеством множества D.

2.2. Способы задания функции

1 Какая из следующих диаграмм задает функцию?



① ② ③ ④

Объясняем

Диаграмма ① задает функцию, так как каждому элементу x области определения X соответствует единственный элемент y области значений Y.

Диаграмма ② не задает функцию, так как...

Диаграмма ③ ..., так как...

Диаграмма ④ ..., так как...

2 а) Какие из следующих таблиц задают функцию?

①

x	3	5	7	8
f(x)	13	15	17	18

②

x	–3	–2	–1	1	2	3
g(x)	3	2	1	1	2	3

③

x	A	B	C	D	E
h(x)	1	1	1	1	1

б) Запишите формулой каждую из функций, заданных в пункте а).

Объясняем

а) Каждая из таблиц ①–③ задает функцию, так как ...

б) Функции, заданные таблицами ①–③, можно записать следующим образом:

$f: \{3, 5, 7, 8\} \to \{13, 15, 17, 18\}, \quad f(x) = x + 10.$

$g: \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, \} \to \boxed{}, \quad g(x) = \boxed{}.$

$h: \boxed{} \to \{1\}, \quad h(x) = \boxed{}.$

Функцию можно задать:
- ***таблицей значений*** функции;
- диаграммой;
- графиком;
- формулой;
- словесно.

синтетический способ

аналитический способ

Как правило, функция задается синтетически в тех случаях, когда ее область определения содержит небольшое количество элементов. Задание функции с помощью графика будет рассмотрено в следующем параграфе.

Упражнения и задачи

1. Перечертите и заполните таблицу:

а)

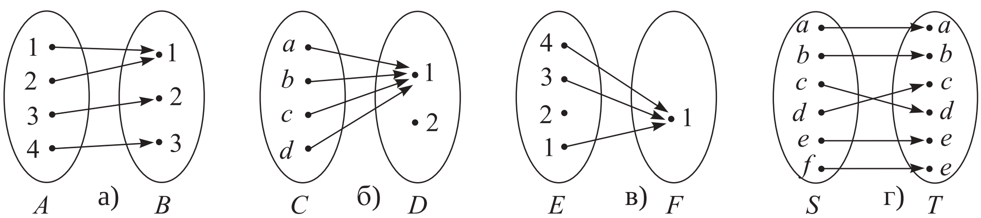
Число	–3	2	0	1	5
Противоположное ему число	3				

б)

Число	–2	–1	0	1	2	3
Куб числа	–8					

2. Каждому месяцу текущего года соответствует определенное количество дней. Задает ли это соответствие функцию? Обоснуйте.

3. Каждой букве русского алфавита ставится в соответствие ее порядковый номер расположения в алфавите. Задает ли это соответствие функцию? Обоснуйте.
4. Пусть M – множество чисел. Каждому числу $|x|$, где x из множества M, ставится в соответствие число x. Задает ли это соответствие функцию, если:
   а) $M = \mathbb{N}$; б) $M = \mathbb{Z}$; в) $M = \mathbb{Q}$? Обоснуйте.
5. Является ли функцией соответствие между фамилией и именем людей? Обоснуйте.
6. Пусть M – множество чисел. Каждому числу из множества M ставится в соответствие предшествующее ему число. Задает ли это соответствие функцию, если:
   а) $M = \mathbb{N}$; б) $M = \mathbb{Z}$?
7. Пусть M – множество чисел. Каждому числу из множества M ставится в соответствие последующее ему число. Задает ли это соответствие функцию, если:
   а) $M = \mathbb{N}$; б) $M = \mathbb{Z}$?
8. Прочтите: а) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(x) = x^2$; б) $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ g(x) = |x|$;
   в) $t\colon \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{R},\ t(x) = \sqrt{x}$; г) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = 2x$.
9. Какая из следующих диаграмм задает функцию?



10. Задайте аналитически функцию:
    а) со значениями в множестве $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ и определенную на множестве $B = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0\}$, которая ставит в соответствие каждому числу противоположное ему число;
    б) определенную на множестве $A = \left\{\frac{1}{3}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{5}, \frac{2}{3}, \frac{1}{7}\right\}$ со значениями в множестве $B = \left\{-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 3, 5, 7\right\}$, которая ставит в соответствие каждому числу обратное ему число;
    в) которая ставит в соответствие каждому неотрицательному действительному числу квадратный корень из этого числа;
    г) которая ставит в соответствие каждому целому числу, модуль которого меньше 7, его квадрат.
11. Найдите значение функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 4x$, при x, равном:
    а) –2,4; б) 3,5; в) $\sqrt{2}$; г) $-1\frac{5}{8}$.

12. При каких значениях x значение функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x$ равно:
    а) 8; б) –5; в) $\sqrt{18}$; г) $3\frac{3}{4}$?

13. Составьте и заполните таблицу значений функции:

а) $f: \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{Q},\ f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$;

б) $f: \{a^2 \mid a < 6,\ a \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{N},\ f(x) = \sqrt{x}$;

в) $f: \{a \mid |a| < 5,\ a \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{Z},\ f(x) = a + 3$;

г) $f: \{2a \mid -3 \le a \le 4,\ a \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{Z},\ f(x) = 3a$.

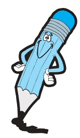
14. Задайте аналитически (формулой) функцию, которая задана следующей таблицей значений:

а)

0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
1	2	3	4	5

б)

1	2	3	4	5
$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$



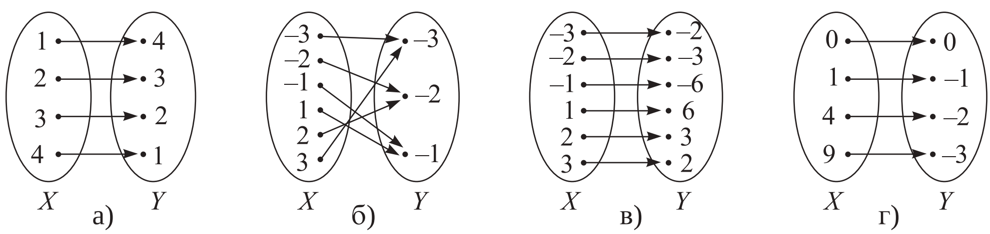
в)

–2	–1	0	1	2
–1,4	–0,4	0,6	1,6	2,6

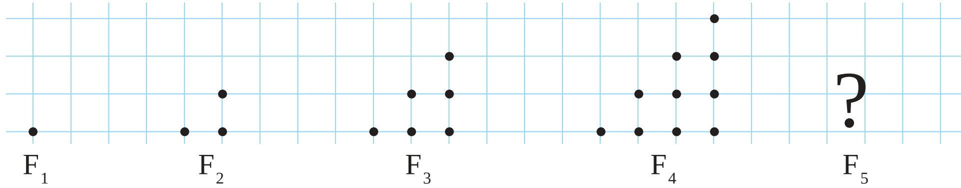
г)

0	1	2	3	4
1	2	4	8	16

15. Задайте аналитически функцию, которая задана диаграммой:



16. Определите закономерность и постройте следующую фигуру.



Сколько точек будет в фигуре F_5? А в фигурах F_{10}, F_{15}?

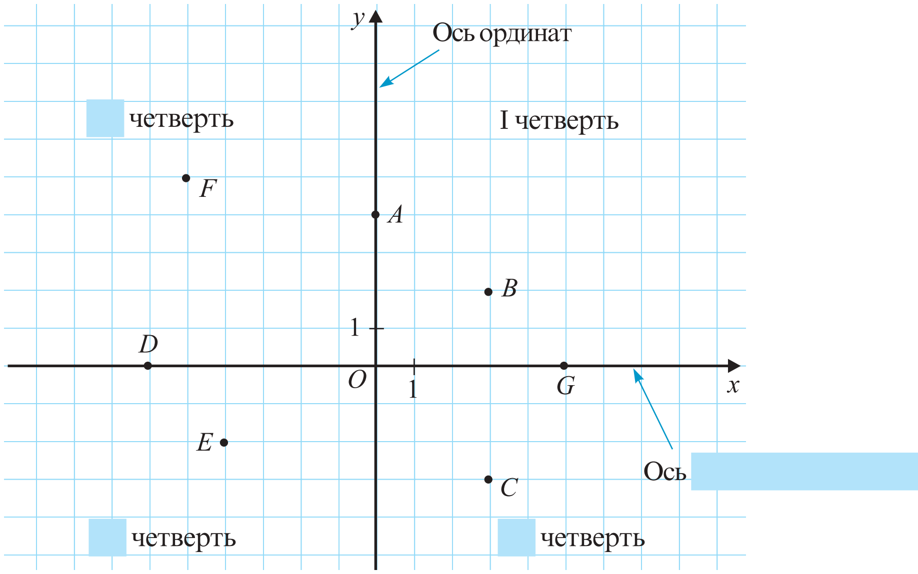
17. Функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z},\ f(x) = [x]$, ставит в соответствие каждому действительному числу x его целую часть (ближайшее к нему целое число, не превышающее число x). Вычислите:

а) $f(2{,}71)$, $f(0{,}49)$, $f(3\frac{5}{7})$; б) $f(-3{,}14)$, $f(-5{,}81)$, $f(-7{,}9)$.

18. Каждому натуральному числу ставится в соответствие число, образованное последней цифрой (цифрой единиц) соответствующего числа. Задайте аналитически (с помощью формулы) это соответствие.
Указание. Используйте функцию из предыдущего задания.

§ 3. График функции

1 Рассмотрите и дополните:



Точка B имеет координаты (3; 2). Точка G (5; 0) принадлежит оси ______.

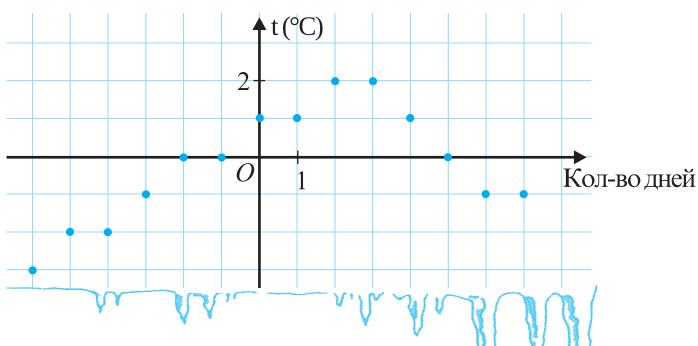
Точка D имеет координаты (–6, ___). Точка E принадлежит ___ четверти.

Точка F принадлежит ___ четверти. Точка ___ принадлежит IV четверти.

Абсцисса точки A равна ___. Ордината точки E равна ___.

Точки F и ___ равноудалены от оси ______.

2 Миша провел зимние каникулы в Риме. Из любопытства он измерял температуру воздуха и результаты своих наблюдений представил в виде графика (точка O соответствует Новому Году). Рассмотрите график и заполните пропуски.



На Новый Год температура воздуха была ___ °C.

За три дня до Нового Года температура воздуха была ___ °C.

В течение ___ дней после Нового Года температура воздуха повысилась на 2°C.

Температура –1 °C была зарегистрирована ______.

Спустя четыре дня после Нового Года температура воздуха была ___ °C.

• Задает ли изображенный график функцию?

Объясняем

Изображенный график задает функцию вида $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, так как каждому числу дней (x, где $x \in \mathbb{Z}$) соответствует единственное значение температуры (y, где $y \in \mathbb{R}$).

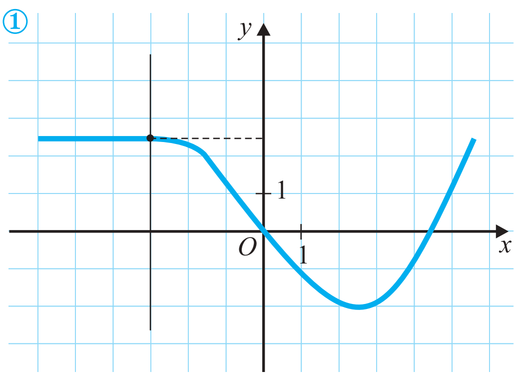
- Функция $f\colon X \to Y$, где X и Y – числовые множества, называется **числовой функцией**.
- **Графиком** числовой функции $f\colon X \to Y$ является фигура, образованная точками (x, y), где $x \in X$ и $y = f(x) \in Y$.

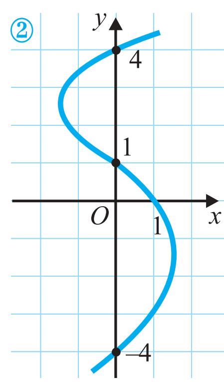
  График функции f обозначается через G_f.

  Итак, $G_f = \{(x, y) \mid x \in X,\ y = f(x) \in Y\}$.

3 а) Какой из следующих графиков задает функцию?

б) Как по заданному графику и по заданному значению x найти значение функции?

①


②


Объясняем

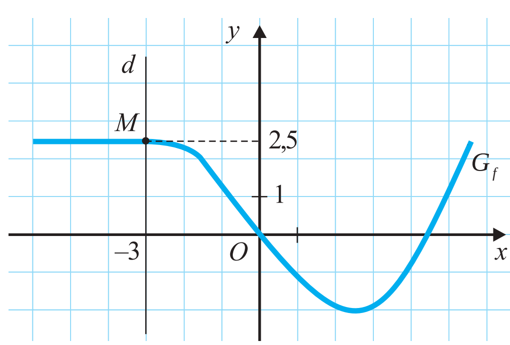
а) График ① задает функцию, потому что каждому значению x соответствует единственное значение y.

График ② ______ функцию, так как существуют значения x, которым соответствуют несколько значений y. Например, абсциссе 0 соответствуют несколько значений y: –4; 1 и 4.

б) Обозначим через f функцию, заданную графиком ①. Найдем значение функции f в точке –3:

- строим прямую d, параллельную оси ординат, которая пересекает ось абсцисс в точке –3;
- пусть M – точка пересечения прямой d с графиком функции f.

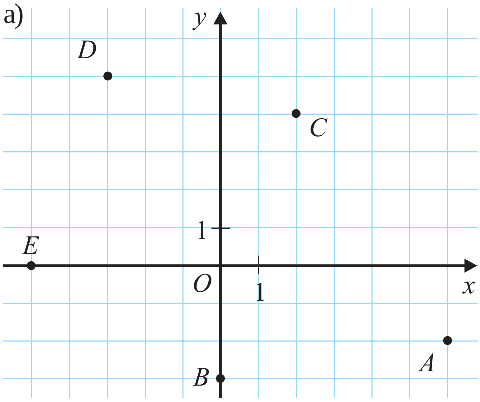
Ордината точки M – это значение функции f в точке с абсциссой –3. Итак, $f(-3) = 2{,}5$.



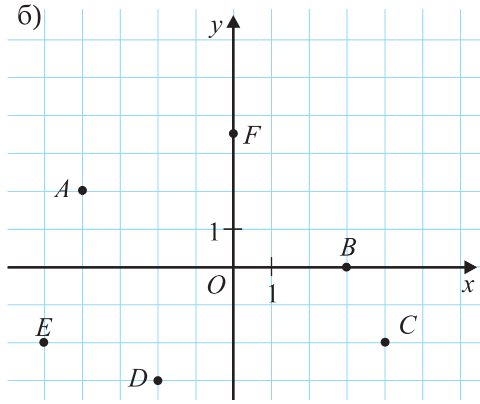
Упражнения и задачи

1. Запишите координаты точек, изображенных в прямоугольной системе координат:

а)



б)



2. Постройте прямоугольную систему координат и отметьте в ней точки:

а) $A(-3;\ 5)$, $B(0;\ 2)$, $C(-4;\ 0)$, $D(3{,}5;\ -2)$;

б) $A(1;\ -2)$, $B(3;\ -1)$, $C(-5;\ -3)$, $D(1{,}5;\ 4)$.

3. Постройте график функции, заданной таблицей:

а)

–3	–2	–1	0	1	2	3
9	4	1	0	1	4	9

б)

–3	–2	–1	0	1	2	3
5	3	–2	0	2	–3	–5

в)

0	1	2	3	4	5	6
6	5	4	3	2	1	0

г)

0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
0	1	0	1	0	1	0

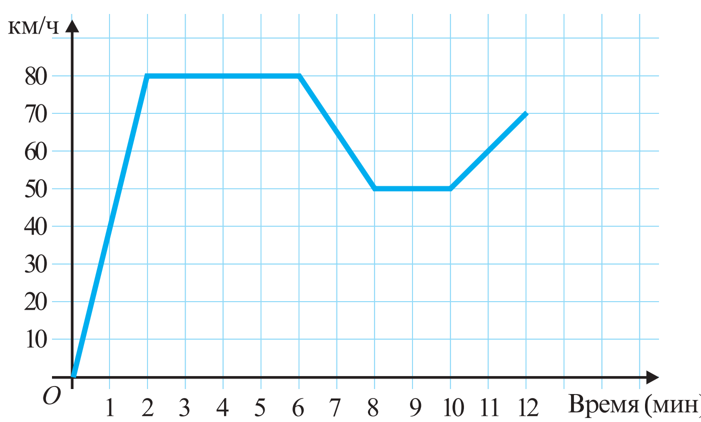
4. На рисунке изображен график скорости движения автомобиля. Используя график, определите:

а) Через сколько минут после начала движения автомобиль достиг максимальной скорости?

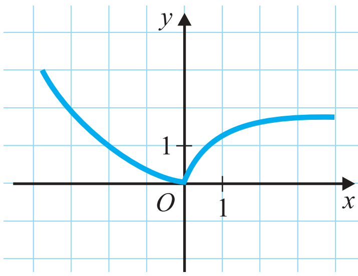
б) Сколько минут ехал автомобиль со скоростью 80 км/ч ?

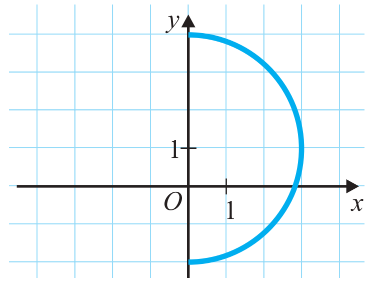
в) Какой была скорость автомобиля через 10 минут после начала движения?

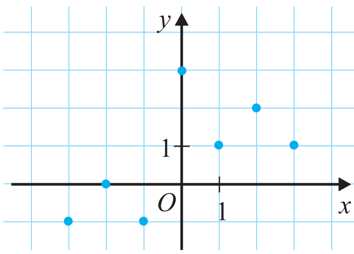
г) Сколько времени автомобиль двигался со скоростью 50 км/ч?

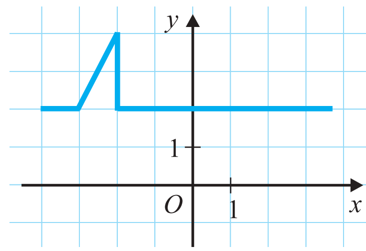


5. Какой из следующих графиков задает функцию?

а) 

б) 

в) 

г) 

6. Постройте таблицу значений, затем график функции:

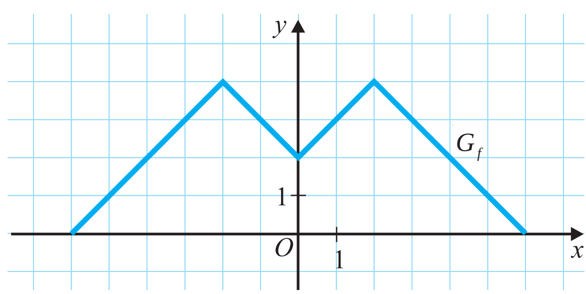
а) $f: \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,\} \to \mathbb{Z},\ \ f(x) = x^2 - 3;$

б) $f: \{x \mid |x| \le 5,\ x \in \mathbb{Z}^*\} \to \mathbb{Q},\ \ f(x) = \dfrac{1}{x};$

в) $f: \left\{0, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{4}{9}, 1, \dfrac{16}{9}, \dfrac{9}{4}, \dfrac{25}{9}, 4\right\} \to \mathbb{Q},\ \ f(x) = \sqrt{x};$

г) $f: \{x \mid |x| \le 5,\ x \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{Z},\ \ f(x) = 0{,}5x.$

7. Рассмотрите график функции f и найдите:
а) значение функции f в точках: $-5;\ -3{,}5;\ -2;\ 1{,}5;\ 3;$
б) точки, в которых значение функции равно 0; 1,5; 2; 3; 3,5.



8. Постройте график функции:

а) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ \ f(x) = 3x;$

б) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ \ f(x) = -2x;$

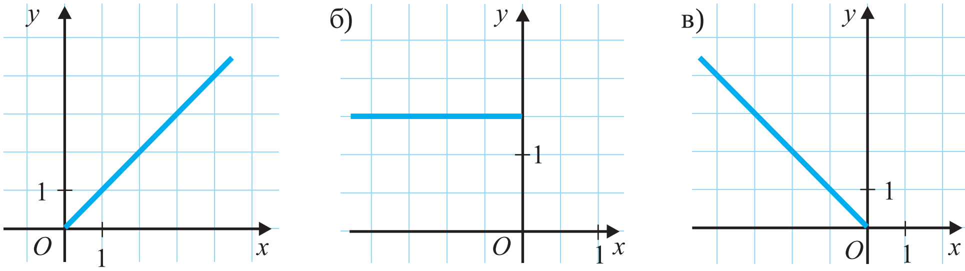
в) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ \ f(x) = x^2;$

г) $f: \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Q},\ \ f(x) = \dfrac{8}{x};$

д) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = 4.$

9. Задайте аналитически (формулой) функцию, заданную графически полупрямой:

а) б) в)



10. Найдите точки пересечения графика функции с осью абсцисс:

а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{3-x}{4}$; б) $f: [2; +\infty) \to \mathbb{R}_+,\ f(x) = \sqrt{x-2}$;

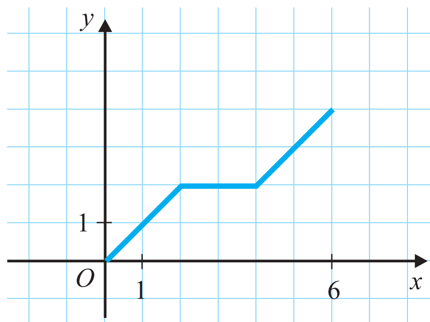
в) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 4$; г) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2{,}3 - |x|$.

11. Принадлежит ли точка $A(-1,\ 2)$ графику функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, если:

а) $f(x) = -2x$; б) $f(x) = x^2 + 1$; в) $f(x) = 3 - x$?

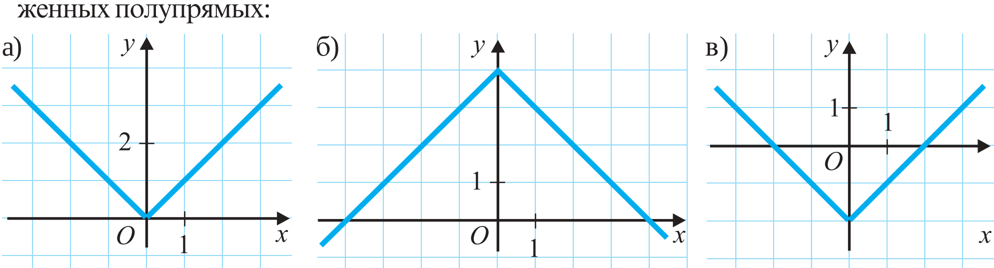
12. Известно, что областью определения функции $f(x)$ является множество $M = \{x \,|\, |x| \le 6,\ x \in \mathbb{R}\}$.
На рисунке изображен график функции f для $0 \le x \le 6$.
Перечертите и дополните график функции f для любого x из множества M, если:

а) $f(-x) = f(x)$; б) $f(-x) = -f(x)$.



13. Задайте аналитически функцию, графиком которой является объединение изображенных полупрямых:

а) б) в)



14. Постройте график функции: а) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ f(x) = (-1)^x$;

б) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ f(x) = x \cdot (-1)^x$; в) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x| - 1$.

15. Постройте график функции, определенной на множестве $M = \{x \,|\, x < 10,\ x \in \mathbb{N}\}$, которая ставит в соответствие числу x остаток от деления числа x на 3.

16. Докажите, что окружность не является графиком ни одной функции.

§ 4. Функции I степени. Постоянные функции

4.1. Понятия *функция I степени* и *постоянная функция*

1 Высота бамбука 2 м. За день бамбук вырастает на 0,8 м.

а) Запишите формулу, по которой можно определить высоту бамбука через заданное количество дней.

б) Начертите таблицу и запишите в ней высоту бамбука через 0 дней, 1 день, 2 дня, 3 дня, 4 дня.

в) Представьте графически полученную функцию.

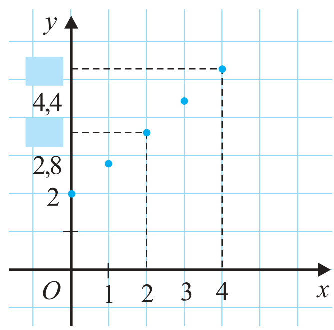
Объясняем

а) За x дней бамбук вырастает на $\boxed{}$ · x (метров).

Высота бамбука через x дней будет равна h = 2 + $\boxed{}$ · x (метров).

б)

x (дней)	0	1	2	3	4
h (м)	2	2,8	?	4,4	?



в) Получим функцию:

h: {0, 1, 2, 3, 4} → ℝ, h(x) = 2 + $\boxed{}$ x.

Построим график функции, отметив в системе координат точки (0; 2), (1; $\boxed{}$), (2; $\boxed{}$), (3; 4,4), (4; $\boxed{}$).

Замечание. Заметим, что все 5 отмеченных точек – коллинеарные.

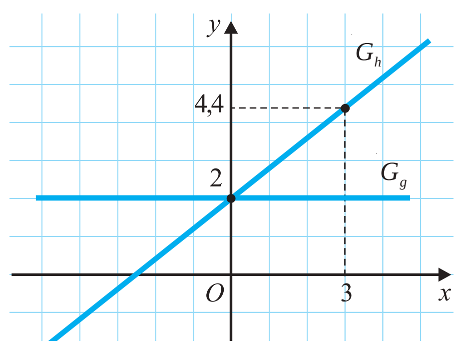
2 Что представляет собой график функции $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 0{,}8x + 2$? А функции $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2$?

Решение:

Графиком функции $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 0{,}8x + 2$, является прямая.

Для построения этой прямой достаточно определить координаты двух различных точек, принадлежащих графику функции.

Графиком функции $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2$, является прямая, параллельная оси Ox.



Определения. ♦ Функция вида $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, где $a \neq 0$ и $a, b \in \mathbb{R}$, называется **функцией I степени**.

♦ Функция вида $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = b$, где $b \in \mathbb{R}$, называется **постоянной функцией**.

Графиком функции I степени является прямая.
Графиком постоянной функции является прямая, параллельная оси абсцисс.

4.2. Свойства функции I степени

Практическая работа

а) Учитывая, что графиком функции I степени является прямая, постройте в одной системе координат графики функций $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x - 1$, $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = -2x + 2$.

б) Найдите координаты точек пересечения графика каждой функции с осью абсцисс; с осью ординат.

в) Определите тип угла, образованного графиком каждой функции с положительным направлением оси Ox.

г) Пусть $x_1 < x_2$. Сравните: $f(x_1)$ с $f(x_2)$; $h(x_1)$ с $h(x_2)$.

д) При каких значениях x: $f(x) > 0$; $h(x) > 0$? А $f(x) < 0$; $h(x) < 0$?

Объясняем

а) Так как любая прямая определяется двумя ее различными точками, достаточно заполнить таблицу значений функций для двух значений x.

x	0	1
$f(x)$	–1	1
$h(x)$	2	0

Точки с координатами (0, –1) и (1, 1) определяют прямую, которая является графиком функции f(x).

Точки с координатами (0, ___) и (1, ___) определяют прямую, которая является графиком функции $h(x)$.

б) Можно использовать график, а можно поступить следующим образом:

– Определяем точку пересечения с осью абсцисс:

$f(x) = 2x - 1 = 0$ или $2x = 1$.

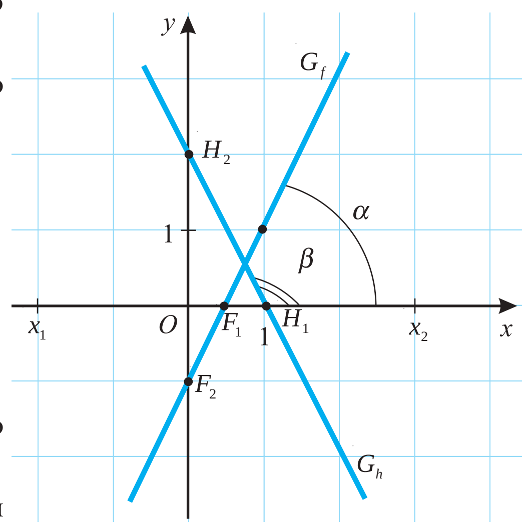
Следовательно, $x = \frac{1}{2}$ и $F_1\left(\frac{1}{2}; 0\right) \in G_f$.

$h(x) = -2x + 2 = 0$ или $-2x = -2$.

Значит, x = ___ → $H_1($ ___ $, 0) \in G_h$.

– Определяем точку пересечения с осью ординат:

Применив таблицу значений, получим $F_2(0; -1) \in G_f$ и $H_2(0; 2) \in G_h$.



в) Угол α, образованный графиком G_f и положительным направлением оси Ox, является острым углом.

Угол β, образованный графиком G_h и положительным направлением оси Ox, является ______ углом.

г) Анализируя графики функций f и g, заметим, что для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ и $x_1 < x_2$, имеют место соотношения: $f(x_1) < f(x_2)$ и $h(x_1)$ ◯ $h(x_2)$;

д) $f(x) > 0$ для любых $x > \frac{1}{2}$, и $h(x) > 0$ для любых x < ___.

$f(x) < 0$ для любых ______, и $h(x) < 0$ для любых ______.

Пусть дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- Значение переменной x, при которой $f(x) = 0$, называется **нулем** функции f.
- Если для любых $x_1, x_2 \in D(f)$, $x_1 < x_2$, выполняется соотношение:
  а) $f(x_1) < f(x_2)$, то функция f является **строго возрастающей**;
  б) $f(x_1) > f(x_2)$, то функция f является **строго убывающей**.

Пусть дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

- Нулем функции f является число $-\frac{b}{a}$.
- Функция f является:
  а) строго возрастающей, если $a > 0$;
  б) строго убывающей, если $a < 0$.
- Число a называется **угловым коэффициентом** графика функции f.

4.3. Прямая пропорциональность

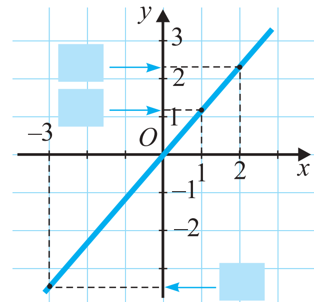
В таблице зафиксировано количество электроэнергии (в киловаттах), потребленной обогревателем за определенное время работы (в часах).

Рассмотрите таблицу и дополните предложения:

Время (ч)	0,5	1	1,5	2
Расход (кВт)	0,6	1,2	1,8	2,4

- Время и расход электроэнергии являются прямо пропорциональными величинами, так как $\frac{0,5}{0,6} = \frac{\square}{1,2} = \frac{1,5}{1,8} = \frac{2}{\square}$.
- Если через x обозначить время, то y = ___ · x – это количество киловатт, израсходованных обогревателем за x часов.
- Итак, таблица задает функцию
  $f: \{0,5;$ ______ $\} \to \mathbb{R}$, $f(x) =$ ___ · x.

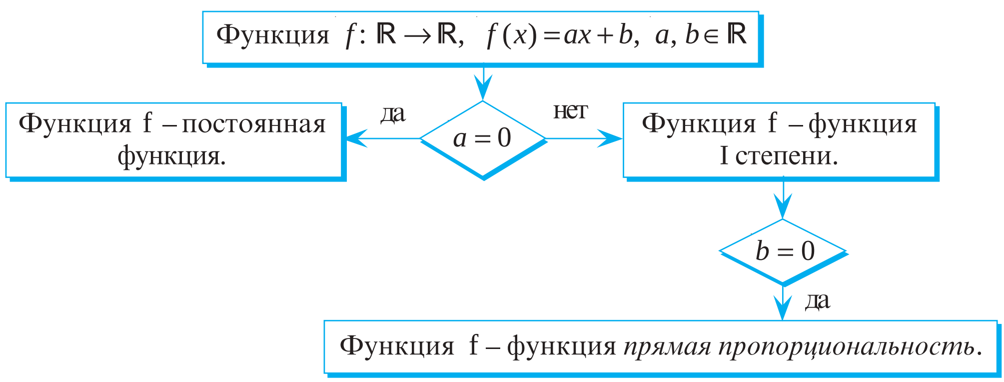
График функции $f: \{0,5; 1; 1,5; 2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1,2x$, состоит из четырех коллинеарных точек, а графиком функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1,2x$, является прямая.



- Функция вида $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, где $a \in \mathbb{R}^*$, называется **прямая пропорциональность**.
  Число a называется **коэффициентом пропорциональности**.
- Графиком функции *прямая пропорциональность* является прямая, проходящая через начало координат.

Заметим, что если в формуле функции I степени $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, взять $b = 0$, то функция f станет функцией *прямая пропорциональность*.

Следовательно, являясь частным случаем функции I степени, функция *прямая пропорциональность* обладает теми же свойствами, что и функция I степени.



- Известно, что точка M(2, 3) принадлежит графику функции *прямая пропорциональность*.
  а) Постройте график этой функции.
  б) Запишите формулу, которая задает эту функцию.

Замечание. Функция *прямая пропорциональность* описывает зависимость между двумя прямо пропорциональными величинами x и y. Зависимость между двумя обратно пропорциональными величинами задается функцией вида $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{k}{x}$, где $k \in \mathbb{R}^*$, которая называется **обратная пропорциональность**.

Функция *обратная пропорциональность* будет изучена в VIII классе.

Упражнения и задачи

1. Постройте график функции:
   а) $f\colon \{-0{,}5;\ 0{,}5;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = 2x - 1;$
   б) $f\colon \{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1{,}5;\ 3\} \to \mathbb{R},\ \ g(x) = -2x + 1;$
   в) $h\colon \left\{-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ 1;\ \frac{3}{2};\ 2;\ \frac{5}{2}\right\} \to \mathbb{R},\ \ h(x) = 0{,}5x.$

2. Дана функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Выберите формулы, которыми можно задать функцию f:
   а) I степени;
   б) постоянную;
   в) *прямая пропорциональность*.

   $f(x) = \frac{1}{3}x$ | $f(x) = 2x - 4$ | $f(x) = \sqrt{5}$ | $f(x) = 8x^2 - 1$ | $f(x) = -3x$ | $f(x) = \sqrt{7}x + 7$ | $f(x) = x^2$

3. Определите угловой коэффициент и постройте график функции:
   а) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x - 4;$
   б) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = -1{,}5x + 2;$
   в) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = 2(x + 1);$
   г) $t\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t(x) = -\frac{5}{2}x;$
   д) $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ p(x) = \frac{1}{2}x + 1;$
   е) $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ q(x) = -3(1 + \frac{x}{3}).$

4. Дана функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Найдите точки пересечения графика функции с осями координат, если:
   а) $f(x) = 0{,}8x + 8;$
   б) $f(x) = -3{,}2x - 6{,}4;$
   в) $f(x) = \frac{4}{5}x + \frac{1}{5};$
   г) $f(x) = -\sqrt{2}x + 2.$

5. Задайте аналитически постоянную функцию, зная, что график этой функции пересекает ось ординат в точке:
   а) $A(0;\ -3);$ б) $B\left(0;\ \frac{1}{2}\right);$ в) $C(0;\ \sqrt{3});$ г) $O(0;\ 0).$

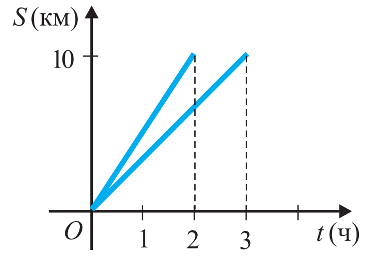
6. В каких четвертях расположен график функции:
   а) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 121x;$
   б) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -0{,}001x;$
   в) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{59}}x;$
   г) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -2^{10}x?$

7. Через какие из точек $A(-10;\ -6)$, $B(20;\ -8)$, $C(-40;\ 4)$ проходит график функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -\frac{1}{5}x - 4?$

8. В баллоне 1,6 кг жидкого газа. Газовая плита за час потребляет 0,1 кг газа. Задайте аналитически зависимость массы газа в баллоне от времени (в часах) работы плиты.

9. У Миши 20 леев. Он купил x тетрадей по 3 лея. Задайте формулой зависимость количества денег, которые остались у Миши, от количества купленных тетрадей.

10. В пустой бак начинают наливать воду из крана со скоростью 4 литра в минуту. Бак вмещает 20 л воды. Постройте график зависимости объема воды в баке от времени t.



11. На рисунке изображены графики движения двух пешеходов. Скорость какого пешехода больше?

12. Запишите формулу функциональной зависимости функции I степени, если график этой функции пересекает оси координат в точках:

а) $A(0; -1),\ B(2; 0)$; б) $A\left(0; \frac{1}{2}\right),\ B(-2; 0)$;

в) $A(0; \sqrt{3}),\ B(\sqrt{3}; 0)$; г) $A(0; -4{,}5),\ B(9; 0)$.

13. Пусть даны функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Определите взаимное расположение графиков этих функций, если:

а) $f(x) = 1{,}5x - 1,\ g(x) = 1{,}5x + 2$; б) $f(x) = 2x - 4,\ g(x) = 3x - 4$;

в) $f(x) = 2{,}5x - 2,\ g(x) = 2{,}5x$; г) $f(x) = -2x + 1,\ g(x) = -2x - 1$.

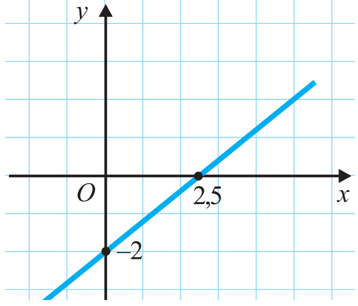
14. Определите тип угла, образованного положительным направлением оси Ох и графиком функции:

а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$; б) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2}x + 2$;

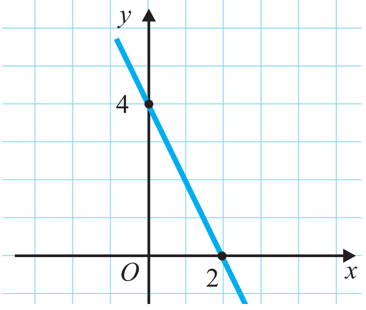
в) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{3}x$; г) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -0{,}8x - 1$.

15. Задайте аналитически функцию I степени, график которой изображен на рисунке:

а)



б)



16. Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -2x + 8$.

1) Найдите нули функции f.

2) Постройте график функции f.

3) Используя график функции, определите значения x, при которых:

а) $f(x) > 0$; б) $f(x) < 0$;

в) f является строго возрастающей; г) f является строго убывающей.

17. Графиком функции I степени f является прямая AB. Задайте аналитически функцию f, если:

а) $A(0; -2)$, $B(1; 1)$; б) $A(0; 8)$, $B(-3; 2)$.

18. Найдите координаты точек пересечения графиков функций:

а) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-4$, и $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=2x-6$;

б) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x-4$, и $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=-2x+1$.

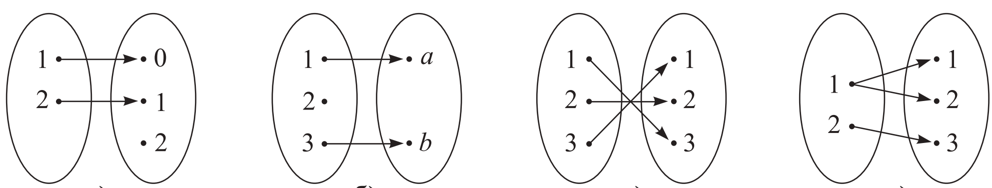
19. Постройте график функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, заданной кусочно:

а) $f(x)=\begin{cases}2x+1, & \text{при } x<0\\ -x+1, & \text{при } x\ge 0;\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}3x, & \text{при } x\le 2\\ 6, & \text{при } x>2;\end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases}-3x-1, & \text{при } x<1\\ -4, & \text{при } x\ge 1.\end{cases}$

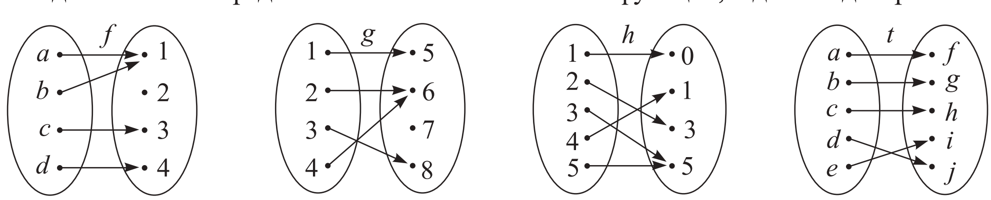
Упражнения и задачи на повторение

1. Какая из следующих диаграмм задает функцию:



а) б) в) г)

2. Найдите область определения и множество значений функции, заданной диаграммой:



а) б) в) г)

3. Рассмотрите функции, заданные в упражнении 2, и вычислите:

а) $f(a)$, $f(c)$, $f(d)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$;

б) $h(1)$, $h(4)$, $h(5)$, $t(a)$, $t(d)$, $t(e)$.

4. Рассмотрите функции, заданные в упражнении 2, и определите, в каких точках:

а) значение функции f равно 3, значение функции g равно 6;

б) значение функции h равно 5, значение функции t равно f.

5. Задайте таблицей функцию:
   а) $f\colon \{1, 3, 5\} \to \{4, 10, 16\}$, $f(x) = 3x + 1$;
   б) $f\colon \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{N}$, $f(x) = 2 \cdot |x|$;
   в) $f\colon \{-3, -2, 1, 2, 3\} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = -x$;
   г) $f\colon \{x \in \mathbb{Z} \,\big|\, |x| < 4\} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x^2 - 1$.

6. Вычислите $f(1)$, $f(3)$ и $f(5)$, если:
   а) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = \dfrac{1}{15}x$;
   б) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = -x + 2$;
   в) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 4 - x$;
   г) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = |x| + 2$.

7. Запишите аналитически (с помощью формулы) функцию, которая ставит в соответствие:
   а) каждому натуральному числу удвоенный квадрат этого числа;
   б) каждому целому числу четверть числа, ему противоположного;
   в) каждому рациональному числу число, противоположное обратному числу;
   г) каждому действительному числу корень из модуля этого числа.

8. Найдите множество значений функции:
   а) $f\colon \{-2, -1, 5, 7\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$;
   б) $f\colon \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x| - 1$;
   в) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$;
   г) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.

9. Постройте график функции:
   а) $f\colon \{x \in \mathbb{Z} \,\big|\, |x| \le 4\} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x$;
   б) $f\colon \{x \in \mathbb{Z} \,\big|\, |x| \le 5\} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = -2x - 1$;
   в) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$;
   г) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x$.

10. Задайте таблицей функцию, графиком которой является множество:
    а) $G_f = \{(0; 0), (1; 1), (2; 4), (3; 9)\}$;
    б) $G_f = \{(0; 0), (1; 2), (2; 4), (3; 6)\}$;
    в) $G_f = \{(-2; 2), (-1; 2), (0; 2), (1; 2), (2; 2)\}$;
    г) $G_f = \left\{(1; 1),\ (2; 0{,}5),\ \left(3; \dfrac{1}{3}\right),\ (4; 0{,}25)\right\}$.

11. Запишите аналитически каждую из функций, заданных в упражнении 10.

12. Постройте график функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, если:
    а) $a = 3$, $b = -1$; б) $a = b = -2$; в) $a = -1$, $b = 3$; г) $a = b = 3$.

13. Для каждой из функций, заданных в упражнении 12, найдите точки пересечения с осями координат и вид угла, образованного графиком функции и положительным направлением оси Ox.

14. Дополните:

а) $A\left(\frac{1}{5};\ \square\right)\in G_f$, где $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=20x$;

б) $B\left(\frac{1}{3};\ \square\right)\in G_f$, где $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-18x$;

в) $C(\ \square\ ;\ -3)\in G_f$, где $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=12x$;

г) $D(\ \square\ ;\ -1)\in G_f$, где $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=5x-4$.

15. Какие из следующих формул задают функцию? Обоснуйте.

а) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x}$; б) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x}$;

в) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x|$; г) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z},\ f(x)=x$.

16. Дана функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Выберите формулы, которыми можно задать функцию f:

а) первой степени;

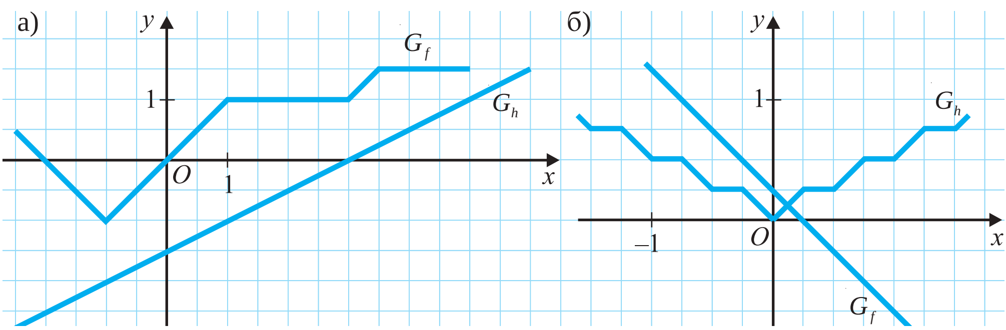
б) постоянную;

в) прямой пропорциональности.

$\boxed{f(x)=\frac{x}{4}}$ $\boxed{f(x)=\frac{4-x}{2}}$ $\boxed{f(x)=2(1-x)-2}$ $\boxed{f(x)=0}$

$\boxed{f(x)=5}$ $\boxed{f(x)=\frac{1+x}{2}}$ $\boxed{f(x)=\frac{x}{3}+\frac{1}{3}}$ $\boxed{f(x)=x^2}$

17. Рассмотрите графики функций f и h. Вычислите значения функций f и h в точках с абсциссой, равной: –1,5; –1; –0,5; 0; 0,5; 1; 1,5.



18. Запишите аналитически функцию, заданную таблицей:

а)

x	–5	–3	–1	3	5
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{3}$

б)

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	0	–1	–2	–3

в)

x	0	1	2	3
$f(x)$	3	2	1	0

г)

x	–2	–1	0	1	2
$f(x)$	3	2	1	2	3

19. Дополните:

а) Точка $A(1; 1)$ принадлежит графику функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \boxed{} \cdot x - 1$.

б) Точка $B(-1; 1)$ принадлежит графику функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x + \boxed{}$.

в) Точка $C(\boxed{}; -15)$ принадлежит графику функции $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ f(x) = -x^2 + 1$.

г) Точка $D(\boxed{}; 3)$ принадлежит графику функции $f\colon \mathbb{R}_- \to \mathbb{R},\ f(x) = |x + 2|$.

20. Дана функция $f\colon \{10, 15, 20, 50, 100\} \to \mathbb{R}$. Задайте аналитически функцию f, которая переводит:
а) массу, выраженную в килограммах, в граммы;
б) длину, выраженную в сантиметрах, в миллиметры;
в) интервал времени, выраженный в секундах, в минуты;
г) массу, выраженную в миллиграммах, в граммы.

21. Определите множество значений функции f, заданной в предыдущем упражнении.

22. Определите, содержит ли график функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ точки, у которых абсцисса равна ординате, если:
а) $f(x) = 2x - 4$; б) $f(x) = x + 0{,}19$; в) $f(x) = 0{,}8x - 5$; г) $f(x) = |x|$.

23. Из 25 л молока можно получить 3 л сметаны.
а) Задайте аналитически функцию f, которая ставит в соответствие каждому x количество сметаны, полученной из x литров молока.
б) Вычислите $f(180)$; $f(0{,}5)$; $f(200)$.
в) При каких значениях x значение функции f равно 4,5; 0,6; 0,5?

24. Сколько можно задать функций, для которых множество $\{1; 2\}$ является областью определения, а множество $\{1; 2; 3\}$ – областью значений?

25. В таблице указаны тарифы на телефонные переговоры для двух „пакетов“.

„Пакет“	Кол-во минут	Абонентская плата (леев)	Тариф на дополнительные минуты (банов)
Стандарт	300	24	9,6
Эконом	200	6	24

а) Задайте функции, описывающие формулы, по которым можно вычислить телефонную оплату для каждого „пакета“.
б) Найдите значения функций S и E, соответствующие пакету *Стандарт* и пакету *Эконом*, в точках 100, 200, 250, 300, 400.
в) Для каких значений аргумента x будет верно равенство $S(x) = E(x)$? Какой вывод можно сделать, рассмотрев это равенство?

26. Дана функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 3$.
а) Вычислите $f(f(-1))$, $f(f(2))$.
б) При каких значениях x, $f(x) = f(f(x))$?

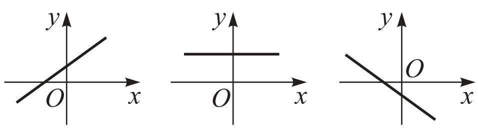
Проверочная работа

Время выполнения работы: 45 минут

1 вариант

1. Дана функция $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{2}{7}x + 4$. Назовите три элемента функции f. **1 б**

2. На рисунке изображен график функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + n$, $m, n \in \mathbb{R}$. Сравните числа a и b с нулем. **1 б**



а) б) в)

3. Постройте график функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 6$. **4 б**
   а) Найдите нули функции f.
   б) Определите знак функции f.
   в) Установите, функция f является строго возрастающей или строго убывающей.
   г) Укажите угловой коэффициент графика функции f.

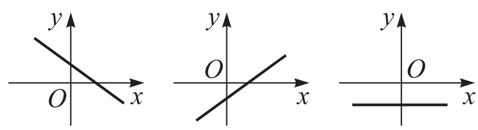
4. а) Дополните так, чтобы получить функцию прямой пропорциональности с положительным коэффициентом $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \boxed{}$ x. **2 б**
   б) Определите вид угла, образованного графиком функции f и положительным направлением оси Ox.

5. Запишите формулу, которая выражает зависимость времени t от скорости v, зная, что пройденный путь равен s. Является ли эта зависимость прямо пропорциональной? **2 б**

2 вариант

1. Дана функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2\sqrt{x} - 3$. Назовите три элемента функции g.

2. На рисунке изображен график функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + n$, $m, n \in \mathbb{R}$. Сравните числа a и b с нулем.



а) б) в)

3. Постройте график функции $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x - 4$.
   а) Найдите нули функции g.
   б) Определите знак функции g.
   в) Установите, функция g является строго возрастающей или строго убывающей.
   г) Укажите угловой коэффициент графика функции g.

4. а) Дополните так, чтобы получить функцию прямой пропорциональности с отрицательным коэффициентом $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \boxed{}$ x.
   б) Определите вид угла, образованного графиком функции g и положительным направлением оси Ox.

5. Запишите формулу, которая выражает зависимость времени t от расстояния s, зная скорость v. Является ли эта зависимость прямо пропорциональной?

ГЛАВА 4

Алгебраические выражения

§ 1. Применение буквенных выражений

1.1. Сложение действительных чисел, представленных буквенными выражениями

1 Господин Копилкин два дня провел в Кишиневе. Экономный по натуре (а может, из любопытства), он решил подсчитать, сколько денег он потратил на проезд в городском транспорте. Рассмотрите таблицу, учитывая, что a – цена (в леях) проезда на автобусе, а t – цена (в леях) проезда на троллейбусе.

	Автобус		Троллейбус	
	Кол-во поездок	Стоимость	Кол-во поездок	Стоимость
Суббота	2	2a	3	3t
Воскресенье	1	a	2	2t
Всего	3	?	?	?

Объясняем

В субботу господин Копилкин потратил $(2a+3t)$ леев.

В воскресенье господин Копилкин потратил ($\square$ + $\square$) леев.

Всего господин Копилкин потратил (2a + 3t + a + $\square$) леев, то есть (3a + $\square$) леев.

2 Рассмотрите и заполните: $2\sqrt{3}-\sqrt{5}+3\sqrt{3}+2\sqrt{5}$ $\qquad$ $2a+3t+a+2t$

$\downarrow$ $\qquad$ $\downarrow$

Подобные корни $\qquad$ Подобные слагаемые

$2\sqrt{3}$ и $3\sqrt{3}$; $\square$ и $2\sqrt{5}$. $\qquad$ 2a и a; $\square$ и $\square$.

Каждое из алгебраических выражений $2a$, $3t$, a, $2t$, $-5bc$, $\sqrt{2}y$ состоит из **буквенной части** и **коэффициента**.
Коэффициент – это действительное число.
Слагаемые с одинаковой буквенной частью называются **подобными слагаемыми**.

$-\sqrt{2}\,x$; $\frac{1}{9}a^2b$; $2xyz$

■ – коэффициент
■ – буквенная часть

Чтобы сложить (или **привести**) **подобные слагаемые**, надо сложить их коэффициенты и результат умножить на общую буквенную часть.

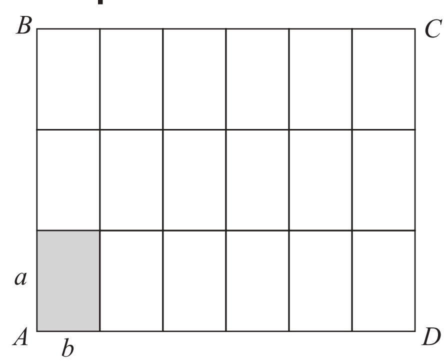
• Заполните:

Выражение	2a	t	$-\sqrt{3}x$	$\frac{1}{4}y$	$-\frac{a}{3}$	5sm
Коэффициент		1				

3 Рассмотрите и продолжите приведение подобных слагаемых:

$$4\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}y+\frac{2x}{3}+\frac{y}{3}-1=\left(4\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)x+\left(-\frac{1}{9}+\square\right)y-1=5x+\square\,y-1.$$

1.2. Умножение и деление действительных чисел, представленных, буквенными выражениями



1 Прямоугольник ABCD разделили на 18 равных прямоугольников со сторонами a и b. Пусть $\mathscr{A}$ – площадь прямоугольника ABCD, а S – площадь маленького прямоугольника.

Дополните:

Длины сторон прямоугольника ABCD равны 3a и 6b.

$\mathscr{A}=3a\cdot6b$, и S = $\square$.

Тогда, $\mathscr{A}=18\cdot S=18\cdot\square$.

$\rightarrow$ $3a\cdot6b=18\cdot\square$

• Каков будет результат, если $a=b$?

2 Рассмотрите и дополните:

а) $3\cdot2^2\cdot5\cdot2^3\cdot4\cdot5=3\cdot4\cdot2^{2+3}\cdot5^{\square}=\square\cdot2^{\square}\cdot5^{\square}.$

б) $5a^4\cdot6b^2\cdot a^3\cdot3b=5\cdot\square\cdot3\cdot a^{4+3}\cdot b^{\square+\square}=\square\cdot a^{\square}\cdot b^{\square}.$

Чтобы выполнить умножение действительных чисел, представленных буквенными выражениями, надо:
- умножить их коэффициенты;
- умножить соответствующие буквенные части, используя свойства степени.

3 Рассмотрите и дополните:

а) $(18\cdot5^4):(6\cdot5^2)=(18:6)\cdot(5^4:5^2)=3\cdot5^{\square-\square}=3\cdot5^{\square}.$

б) $12x^5y^3:3x^2y=(12:3)\cdot(x^5:x^2)\cdot(y^3:y)=\square\cdot x^{5-2}\cdot y^{\square-\square}=\square\cdot x^{\square}\,y^{\square}.$

Чтобы выполнить деление действительных чисел, представленных буквенными выражениями, надо:
- разделить их коэффициенты;
- разделить соответствующие буквенные части, используя свойства степени.

1.3. Возведение в степень с натуральным показателем действительных чисел, представленных буквенными выражениями

Рассмотрите и дополните:

а) $\left(\frac{3}{4}\cdot 7^2\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot(7^2)^{\square} = \frac{3^3}{4^{\square}}\cdot 7^{2\cdot\square} = \frac{3^{\square}}{4^{\square}}7^{\square};$

б) $(-0{,}2ab^3)^3 = (-0{,}2)^3\cdot a^{\square}\cdot(b^3)^{\square} = \square\cdot a^{\square}\cdot b^{3\cdot\square} = -0{,}008\cdot a^{\square}\ b^{\square}.$

Чтобы возвести в степень с натуральным показателем действительное число, представленное буквенным выражением, надо:
- возвести в степень его коэффициент;
- возвести в степень каждый множитель буквенной части.

Упражнения и задачи

1. Заполните:

а)

Выражение	$-3x$	$2a^2$	$0{,}4xy$	$1\frac{1}{2}ab$	$\sqrt{2}xa$	$-5ax$	b^2c	$-3\sqrt{3}c$
Коэффициент								

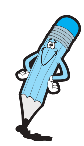
б)

Выражение	xzy	$-abc$	$\frac{2}{3}a$	$\frac{\sqrt{3}}{2}c^2$	-15	$0,(8)d$	$7{,}2x^2$	$-\frac{ax}{2}$
Коэффициент								

2. Рассмотрите выражение и запишите подобные слагаемые:

а) $-2x+3ay-\frac{1}{3}x+2{,}5y^2+9ay-\sqrt{5}y^2+1{,}4x-5.$

$-2x,\ \ldots;$ $\quad$ $3ay,\ \ldots;$ $\quad$ $2{,}5y^2,\ \ldots$



б) $\frac{x^2a}{2}-\frac{5}{2}+\frac{xa}{2}-\frac{5y}{3}-\sqrt{2}xa-x^2a+1+y.$

$\frac{x^2a}{2},\ \ldots;$ $\quad$ $-\frac{5}{2},\ \ldots;$ $\quad$ $\frac{xa}{2},\ \ldots;$ $\quad$ $\frac{5y}{3},\ \ldots$

3. Приведите подобные слагаемые:

а) $2x-5y+3x+y;$

б) $-2+2a-3b-a+b;$

в) $\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+2\sqrt{2}x+\sqrt{2}y;$

г) $a+b-1+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+1.$

4. Выполните умножение: а) $3x\cdot 5y;$ б) $-2a\cdot(-3b);$ в) $2xy\cdot x.$

5. Запишите в виде суммы выражение: а) $7{,}5xy;$ б) $-\frac{2}{5}x^2;$ в) $\sqrt{3}y;$ г) x.

6. Выполните умножение:

а) $-\frac{1}{4}x^2y\cdot 2xy$; б) $0{,}6ab^2\cdot 5a^2b$; в) $2x^3y\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}y\right)$; г) $-3\sqrt{18}ab\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}a^3b^2$.

7. Выполните деление:

а) $12xy:3x$; б) $-\frac{2}{27}x^3y^4:\frac{1}{9}x^2y$;

в) $0{,}1a^4b^2:(-5ab^2)$; г) $1,(5)a^6b^7:0,(5)a^3b^5$.

8. Возведите в степень:

а) $(-2a^3b)^2$; б) $(3xy^2)^4$; в) $\left(\frac{1}{3}x^5y\right)^3$; г) $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}ab^5\right)^4$.

9. Дополните выражение так, чтобы можно было привести все подобные слагаемые:

а) $-3xy+2x^2y-5+\ldots$; б) $\sqrt{2}ab-\sqrt{3}a^2b+10+\ldots$

10. Перепишите и дополните:

а) $2x^2y^3\cdot\square=6x^3y^5$; б) $\square\cdot ab^2=5a^3b^2$;

в) $3xy\cdot\square=0{,}3x^5y^2$; г) $\square\cdot 2a=\frac{2}{3}a^2b^2$.

11. Приведите подобные слагаемые:

а) $2y-5x^2+51-18x^2-2y+3x^2-50-5x+10x^2$;

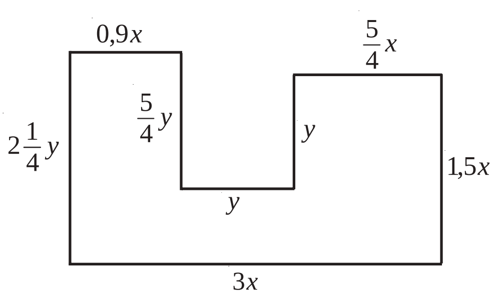
б) $\frac{2}{5}ax+ax^2-\frac{1}{10}ax-a^2x-0{,}1ax+a^2-\frac{2}{3}a^2+ax$.

12. Перепишите и дополните:

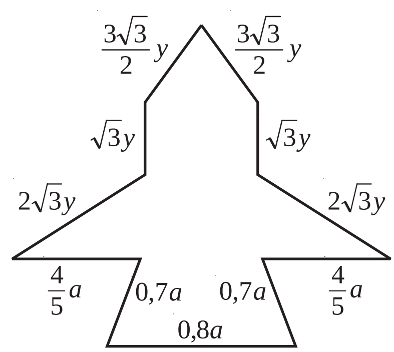
а) $4x^5y^2:\square=2x^3y$; б) $\square:3ab^2=3ab$;

в) $x^3y^8:\square=3x$; г) $\square:a^2b^3=6a^3b^2$.

13. Найдите периметр фигуры:



а)



б)

14. Произведение квадрата одного числа и куба другого числа в 15 раз больше, чем удвоенное произведение квадратов этих чисел. Найдите одно из данных чисел.

15. Во сколько раз периметр прямоугольника больше, чем периметр квадрата, если известно, что одна сторона прямоугольника в 2,5 раза длиннее, а другая в 1,2 раза короче стороны квадрата?

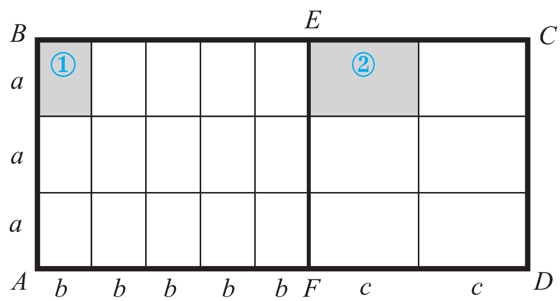
16. Во сколько раз площадь прямоугольника больше площади квадрата, если известно, что стороны прямоугольника длиннее стороны квадрата в 1,2 раза и 1,5 раза соответственно?

17. Сумма двух чисел на 124 больше их разности. Найдите числа, если их произведение равно 310.

§2. Раскрытие скобок. Разложение на множители

2.1. Раскрытие скобок

1 Прямоугольник ABCD разделили на два прямоугольника: ABEF и FECD. Каждый из прямоугольников ABEF и FECD разбит на сетку прямоугольников.
Пусть $\mathscr{A}$ – площадь прямоугольника ABCD.



Рассмотрите рисунок и дополните:

$$\mathscr{A} = 3a(5b+2c)$$

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}_{ABEF} + \mathscr{A}_{FECD} =$$

$$= 3a \cdot 5b + 3a \cdot \boxed{}$$

$$3a(5b+2c) = 3a \cdot 5b + \boxed{} \cdot \boxed{} =$$

$$= \boxed{}\,\mathrm{ab} + \boxed{}\,\mathrm{ac}$$

Умножение действительных чисел, представленных буквенными выражениями, дистрибутивно относительно сложения:
Для любых действительных чисел a, b, c верно соотношение:

$$a(b+c) = ab + ac, \qquad (a+b)c = ac + bc.$$

① ② ③ ①② ①③ ① ② ③ ①③ ②③

• Дополните: $a(b-c) = a(b+(-c)) = a \cdot \boxed{} - \mathrm{a} \cdot \boxed{}$.

2 Рассмотрите и дополните:

(a + b) · c ac + bc

$$(2x+3y)(s+t) = 2x \cdot (s+t) + \boxed{} \cdot (s+t) = 2xs + 2xt + \boxed{} \cdot \mathrm{s} + \boxed{} \cdot \mathrm{t}.$$

a · (b + c) ab ac

Для любых действительных чисел a, b, c верно соотношение:

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

① ② ③ ④ ①③ ①④ ②③ ②④

2.2. Разложение на множители

Разложите на множители выражение $12x^4y^3+18x^2y^5$.

$$12x^4y^3+18x^2y^5=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}12x^4y^3:6x^2y^3=2x^2\\ 18x^2y^5:6x^2y^3=3y^{\square}\end{array}\right\}=$$

$$=6x^2y^3(2x^2+3y^{\square})$$

① Находим НОД коэффициентов 12 и 18: $(12,18)=\mathbf{6}$.

② Находим наименьший показатель степени каждого общего множителя буквенных частей:

$\boldsymbol{x}\to\min(4,\ 2)=\mathbf{2}$

$\boldsymbol{y}\to\min(3,\ 5)=\mathbf{3}$.

③ Выносим за скобки выражение $\boldsymbol{6x^2y^3}$. В скобках остается результат, полученный от деления каждого слагаемого на $6x^2y^3$.

Упражнения и задачи

1. Раскройте скобки:
а) $x(y+z)$; б) $(y-x)z$; в) $2a(3b-c)$; г) $-\frac{1}{2}x(2x+y)$.

2. Раскройте скобки:
а) $(x+y)(u+v)$; б) $(u-v)(x+y)$; в) $(a-b)(c-d)$; г) $(b-a)(x+y)$.

3. Вычислите:
а) $-\sqrt{3}(\sqrt{12}+\sqrt{3})$; б) $\sqrt{6}(\sqrt{24}-\sqrt{6})$;
в) $(\sqrt{8}+\sqrt{5})(\sqrt{8}-\sqrt{5})$; г) $\left(2-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(2+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

4. Найдите площадь прямоугольника, стороны которого равны $(\sqrt{5}+3)$ см и $(3-\sqrt{5})$ см.

5. Раскройте скобки:
а) $\frac{1}{9}x^2y(9x-3y^2)$; б) $\frac{2}{3}xy^2(2y^2+3x^2)$;
в) $(x^2-2y^2)(5x+0{,}5y)$; г) $(3x^3+4y)\left(\frac{1}{3}y+\frac{1}{12}x^2\right)$.

6. Раскройте скобки:
а) $(2a-\sqrt{3})(a^2+3a-\sqrt{3})$; б) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$;
в) $(b-2b^2+1)(1-b)$; г) $(x^2+2xy+y^2)(x-y)$.

7. Разложите на множители:
а) $6mn+6m$; б) $12by-9b$; в) $15ax+20bx$; г) $7y^5+21y^3$;
д) $4x(x-1)-(1-x)$; е) $y(2-x)+9(x-2)$; ж) $5(a-b)+y(b-a)^2$.

8. Сравните площадь квадрата и площадь прямоугольника, если известно, что одна сторона прямоугольника на $\sqrt{10}$ см длиннее, а другая на $\sqrt{10}$ см короче стороны квадрата.

9. Сравните периметр квадрата и периметр прямоугольника, если известно, что одна сторона прямоугольника на $3\sqrt{3}$ см длиннее, а другая на $5\sqrt{3}$ см короче стороны квадрата.

10. Перепишите и дополните:

а) $\square(2xy-5y)=10x^3y^2-\square$; б) $-7ax(\square+\square)=a^2x-14a^3x^2$;

в) $\square\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{4}{3}y^2\right)=\square+\frac{1}{9}xy^3$; г) $\frac{5}{6}a^2b(\square+\square)=a^2b^2+5a^2b$.

11. Разложите на множители:

а) $5a^2b-25ab^2$; б) $-18x^4y^5-24x^5y^4$; в) $-2xy+3x^3y$; г) $16xy^4+24y$.

12. Даны три последовательных натуральных числа. Квадрат первого числа на 56 меньше произведения двух других чисел. Найдите эти числа.

13. Разложите на множители:

а) $5x^2-10xy+5y^2$; б) $xy+6-2x-3y$;

в) $3x-yx-3y+y^2$; г) $2ab+b+2a+b^2$.

14. Длины катетов прямоугольного треугольника равны $\sqrt{12}$ см и $(\sqrt{12}+\sqrt{3})$ см. Найдите площадь треугольника.
Указание. Достройте треугольник так, чтобы получить прямоугольник.

15. Упростите выражение:

а) $3xy(2x^2-y^3)+2xy^4-5x^3y$; б) $-\sqrt{3}ab^2(3ab-2\sqrt{3}b)+3\sqrt{3}a^2b^3+ab^3$.

16. Произведение суммы и разности двух положительных чисел на 49 меньше квадрата одного из этих чисел и на 1 больше числа, противоположного квадрату второго числа. Найдите эти числа.

17. Докажите, что если a является целым числом, то:

а) a^2-a кратно 2; б) a^2+a кратно 2.

Занимательная математика

18. За 32 шара заплатили столько леев, сколько шаров можно купить на 8 леев. Найдите цену шара.

19. Учитывая, что $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$ для любого $n\in\mathbb{N}^*$, найдите сумму:
$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}$.

§ 3. Формулы сокращенного умножения

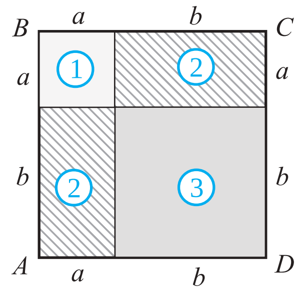
3.1. Квадрат суммы двух чисел

Рассмотрите, прокомментируйте и дополните: $(a+b)^2=?$

I *метод*

$$(a+b)^2=\underset{①}{(a}+\underset{②}{b)}\cdot\underset{③}{(a}+\underset{④}{b)}=\underset{①}{a}\cdot\underset{③}{a}+\underset{①}{a}\cdot\underset{④}{b}+\underset{②}{\square}\cdot\underset{③}{\square}+\underset{②}{\square}\cdot\underset{④}{\square}=$$

$$=a^2+2\,\square\,\square+\square^2$$



II *метод*

$\mathscr{A}_{ABCD}=(a+b)^2$ или

$$\mathscr{A}_{ABCD}=\mathscr{A}_{①}+2\mathscr{A}_{②}+\mathscr{A}_{③}=a^2+2\,\square\,\square+\square^2$$

$$\downarrow$$

$$(a+b)^2=a^2+2\,\square\,\square+\square^2$$

Квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа плюс удвоенное произведение первого числа на второе, плюс квадрат второго числа:

$$\boxed{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.}$$

3.2. Квадрат разности двух чисел

Рассмотрите, прокомментируйте и дополните: $(a-b)^2=?$

$$(a-b)^2=[a+(-b)]^2=\bigcirc^2+2\cdot a\cdot(-b)+\square^2=\bigcirc^2-2ab+\square^2$$

Квадрат разности двух чисел равен квадрату первого числа минус удвоенное произведение первого числа на второе, плюс квадрат второго числа:

$$\boxed{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.}$$

• Докажите, что $(a-b)^2=(b-a)^2$.

3.3. Умножение суммы двух чисел на их разность

Рассмотрите, прокомментируйте и дополните: $(a+b)(a-b)=?$

$$(a+b)(a-b)=\underset{①}{(a}+\underset{②}{b)}\underset{③}{(a}+\underset{④}{(-b))}=\underset{①}{a}\cdot\underset{③}{a}+\underset{①}{a}\underset{④}{(-b)}+\underset{②}{\square}\,\underset{③}{\square}+\underset{②}{\square}\,\underset{④}{\square}=$$

$$=a^2-ab+\square\,\square+\square^2=$$

$$=\square$$

Произведение суммы двух чисел на их разность равно разности квадратов этих чисел:

$$\boxed{(a+b)(a-b)=a^2-b^2.}$$

$$(\bigcirc+\square)^2=\bigcirc^2+2\bigcirc\square+\square^2$$

$$(\bigcirc-\square)^2=\bigcirc^2-2\bigcirc\square+\square^2$$

$$(\bigcirc+\square)(\bigcirc-\square)=\bigcirc^2-\square^2$$

Упражнения и задачи

1. Возведите в степень:

а) $(x+y)^2$; б) $(a-3)^2$; в) $(x+a)^2$;
г) $(b-2)^2$; д) $(3-x)^2$; е) $(4+a)^2$.

2. Выполните действие:

а) $(2x-3y)^2$; б) $(3a+5b)^2$; в) $(\sqrt{3}x-\sqrt{2}y)^2$;
г) $\left(\frac{1}{3}a+2x\right)^2$; д) $(\sqrt{3}+3b)^2$; е) $\left(\frac{b}{4}-\frac{a}{3}\right)^2$.

3. Выполните действие:

а) $(x+y)(x-y)$; б) $(c-b)(c+b)$; в) $(x+4)(x-4)$;
г) $(8-a)(8+a)$; д) $(y-\sqrt{3})(y+\sqrt{3})$; е) $(\sqrt{7}-x)(x+\sqrt{7})$.

4. Перепишите и дополните:

а) $(\square+8a)(\square-8a)=49y^2-\square$; б) $(5x-\square)(5x+\square)=\square-7y^2$;
в) $(\square-3b)(\square+\square)=25y^2-9b^2$; г) $(0{,}6a+\square)(\square-\square)=0{,}36a^2-2b^2$.

5. Перепишите и дополните:

а) $(3a+\square)^2=9a^2+42a+\square$; б) $(\square-5b)^2=36a^2-\square+25b^2$;
в) $(4x-\square)^2=\square-24xy+\square$; г) $(\square+\sqrt{2}a)^2=\square+4\sqrt{3}ab+\square$.

6. Найдите площадь квадрата со стороной, равной:

а) $(\sqrt{5}-2)$ см; б) $(2\sqrt{3}+1)$ см.

7. Квадрат натурального числа на 65 меньше квадрата последующего числа. Найдите это число.

8. Квадрат натурального числа на 85 больше квадрата последующего числа. Найдите это число.

9. Если увеличить длину стороны квадрата на 6 см, то его площадь увеличится на 132 см^2. Найдите длину стороны квадрата.

10. Если уменьшить длину стороны квадрата на 8 см, то его площадь уменьшится на 128 см^2. Найдите длину стороны квадрата.

11. Примените формулу $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ и вычислите устно:

а) $101\cdot 99$; б) $51\cdot 49$; в) $61\cdot 59$;
г) $102\cdot 98$; д) $32\cdot 28$; е) $43\cdot 37$.

12. Примените формулы $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ и вычислите устно:

а) 41^2; б) 59^2; в) 51^2; г) 38^2; д) 62^2.

13. *Истинно или ложно*?

а) Для любых действительных чисел a и b верно соотношение $(a+b)^2 = (-a-b)^2$.

б) Для любых действительных чисел a и b верно соотношение $(a-b)^2 = -(b-a)^2$.

в) Для любых действительных чисел a и b верно соотношение $2(a^2 - b^2) = (a-b)^2 + (a+b)^2$.

14. Зная, что $a + \frac{1}{a} = 4$, найдите: а) $a^2 + \frac{1}{a^2}$; б) $a^4 + \frac{1}{a^4}$.

15. Зная, что $\frac{1}{a} - a = 8$, найдите:

а) $a^2 + \frac{1}{a^2}$; б) $a^4 + \frac{1}{a^4}$.

16. Вычислите:

а) $(\sqrt{3} - 2)^{100} \cdot (\sqrt{3} + 2)^{100}$; б) $(9 - 4\sqrt{5})^{50} \cdot (9 + 4\sqrt{5})^{50}$;

в) $(\sqrt{8} - \sqrt{2})^{20}$; г) $(\sqrt{3} - \sqrt{12})^{16}$.

17. Докажите, что если число a является целым нечетным числом, то $a^3 - 4a$ также является целым нечетным числом.

18. Даны три последовательных натуральных числа. Докажите, что удвоенное первое число на 3 меньше модуля разности квадратов двух других чисел.

§4. Преобразование выражений с помощью формул сокращенного умножения

4.1. Преобразование выражений в квадрат суммы или разности двух чисел

Рассмотрите и дополните.

а) $x^2 + 4xy + 4y^2 = (x + \boxed{})^2$

$x^2 + 2 \cdot x \cdot 2y + (2y)^2 = (x + 2y)^2$ → $x^2 + 4xy + 4y^2 = (x + 2y)^2$

б) $a^2 - 2\sqrt{2}ab + \boxed{}^2 = (a - \boxed{})^2$

$a^2 - 2 \cdot a \cdot \boxed{} + (\quad)^2 = (a - \boxed{})^2$ → $a^2 - 2\sqrt{2}ab + \boxed{}^2 = (a - \boxed{})^2$

в) $29+12\sqrt{5}=(\bigcirc+\square)^2$

$\downarrow$

$29+2\cdot\underset{①}{2}\cdot\underset{②}{3}\underset{③}{\sqrt{5}}=(\bigcirc+\square)^2$

①②
$(2\cdot3)^2=36>29$

②③
$(3\sqrt{5})^2=45>29$

①③
$(2\sqrt{5})^2=20<29$
$+$
$3^2=9<29$
29

$\rightarrow$ $\bigcirc\ 2\sqrt{5}$, $\square\ 3$

$\rightarrow$ $29+12\sqrt{5}=(3+\square)^2$

г) $79-20\sqrt{3}=(\bigcirc+\square)^2$ $\rightarrow$?

4.2. Разложение на множители разности квадратов двух чисел

Рассмотрите и дополните:

а) $4x^2-\dfrac{y^2}{9}=(2x+\square)(\bigcirc-\dfrac{y}{3})$

$\downarrow$

$\bigcirc^2-\square^2=\left(\bigcirc+\square\right)\left(\bigcirc-\square\right)$

$\rightarrow$ $4x^2-\dfrac{y^2}{9}=\left(2x+\dfrac{y}{3}\right)\left(\bigcirc-\square\right)$

б) $2a-3b=(\bigcirc+\square)(\bigcirc-\square)$

$\downarrow$

$(\sqrt{2a})^2-(\sqrt{3b})^2=(\bigcirc+\square)(\sqrt{2a}-\square)$

$\rightarrow$ $2a-3b=(\bigcirc+\square)(\sqrt{2a}-\square)$

• Какими должны быть числа a и b в примере пункта б)?

• Вычислите устно $\dfrac{1{,}01^2-0{,}99^2}{0{,}04}$.

Упражнения и задачи

1. Дополните:

а) $x^2-2xy+y^2=(x-\square)^2$;
б) $x^4+4x^2+4=(\square+2)^2$;
в) $9a^2-6ab+b^2=(\square-b)^2$;
г) $3x^2+4\sqrt{3}xy+4y^2=(\square+2y)^2$.

2. Запишите в виде квадрата суммы или разности:

а) $a^2+2ay+y^2$; б) b^2+c^2-2bc; в) $2xz+z^2+x^2$; г) $9-6y+y^2$.

3. Преобразуйте в квадрат суммы или разности:

а) $16x^2+8xy+y^2$; б) $9y^2-12xy+4x^2$; в) $25x^2+40x+16$; г) $0{,}25a^2-2ab+4b^2$.

4. Дополните:

а) $6-2\sqrt{5}=(\sqrt{5}-\square)^2$; б) $7+4\sqrt{3}=(2+\square)^2$;

в) $22-12\sqrt{2}=(\square-3\sqrt{2})^2$; г) $33+12\sqrt{6}=(\square+3)^2$;

д) $30-12\sqrt{6}=(2\sqrt{3}-\square)^2$; е) $50=(\sqrt{8}+\square)^2$.

5. Запишите в виде квадрата суммы или разности:

а) $29+12\sqrt{5}$; б) $73-40\sqrt{3}$; в) $89+36\sqrt{2}$;

г) $91-48\sqrt{3}$; д) $9+6\sqrt{2}$; е) $17-4\sqrt{15}$.

6. Дополните:

а) $a^2-4b^2=(a-\square)(a+\square)$; б) $9y^2-0,25x^2=(\square-0,5x)(\square+0,5x)$;

в) $3a^2-8y^2=(\sqrt{3}a-\square)(\square+\square)$; г) $\frac{b^2}{6}-\frac{1}{7}x^2=\left(\square-\frac{x}{\sqrt{7}}\right)(\square+\square)$.

7. Разложите на множители:

а) $16a^2-25b^2$; б) $0,09x^2-0,01y^2$; в) $\frac{4}{25}y^2-\frac{25}{4}x^2$; г) $6b^2-7a^2$.

8. Запишите число в виде квадрата суммы:

а) 48; б) 28; в) 35; г) 112; д) 99.

Образец:

$50=(\sqrt{50})^2=(5\sqrt{2})^2=(2\sqrt{2}+3\sqrt{2})^2$

9. Запишите число в виде квадрата разности:

а) 60; б) 44; в) 72; г) 120; д) 58.

10. Упростите выражение:

а) $(a-\sqrt{2})^2-(a+\sqrt{2})^2+3\sqrt{2}$; б) $\frac{a^2-2ab+b^2}{a-b}+a+b$; в) $\frac{x^2-4y^2}{x+2y}-2y$;

г) $(\sqrt{5}-x)^2+(x+\sqrt{5})^2-4\sqrt{5}$; д) $(a-2x)^2-4x^2-a^2$.

11. Разложите на множители:

а) $4a^2-y^2-2a-y$; б) $9x^2+3x-6xy+y^2-y$; в) $5b-4y-16y^2+25b^2$.

12. Вычислите: а) $\frac{34^2-18^2}{104}$; б) $\frac{78^2-46^2}{64}$; в) $\frac{57^2-39^2}{44^2-26^2}$.

13. Сумма квадрата действительного отрицательного числа и его утроенного числа равна 4. Найдите это число.

14. Разность между действительным положительным числом и его квадратом равна –12. Найдите это число.

15. Докажите, что при любом целом a значение выражения:

а) a^3-a делится на 3; б) a^3-a делится на 6.

16. Разложите на множители: а) a^2+b^2; б) $4x^2+9y^2$.

Указание. а) Прибавьте и вычтите выражение $2|a||b|$.

Упражнения и задачи на повторение

1. Приведите подобные слагаемые:

а) $3a+7b-1{,}5a-2{,}8b$; б) $-8x-3+7y+4x-6y+1$;

в) $2x^2y-0{,}5y^2x^2+\frac{1}{4}yx^2-2x^2y^2$; г) $a+\frac{3}{10}-\frac{2}{5}ab+\frac{1}{5}-\frac{3}{5}ab+\frac{a}{4}-1$.

2. Выполните умножение:

а) $\frac{2}{5}x^2\cdot 5y^3$; б) $-3a\cdot\frac{2}{3}a$; в) $\frac{3}{4}a\cdot\left(-\frac{2}{3}y\right)$;

г) $\sqrt{8}x\cdot\sqrt{2}y^2x$; д) $0,(5)x^2y\cdot\left(-\frac{3}{10}\right)xy^2$.

3. Выполните деление:

а) $21x^3y^2:3xy$; б) $-18x^3y^2:(-6xy^2)$;

в) $\frac{3}{5}a^6b^2x:\frac{1}{3}a^4bx$; г) $35a^4b^5:7a^2b^3$.

4. Возведите в степень:

а) $(2x^3y^2)^6$; б) $(-\sqrt{7}x^3z^5)^8$; в) $(3\frac{1}{4}x^2z)^3$.

5. Вычислите:

а) $(\sqrt{8}+\sqrt{32})\sqrt{2}$; б) $(\sqrt{27}-\sqrt{12})\sqrt{3}$;

в) $2\sqrt{5}(\sqrt{125}-3\sqrt{5})$; г) $(4\sqrt{24}+2\sqrt{54})(-0{,}5\sqrt{6})$.

6. Раскройте скобки:

а) $(\sqrt{3}+7)(\sqrt{3}-7)$; б) $(2\sqrt{2}+1)(3\sqrt{2}-4)$;

в) $(\sqrt{12}-5)(2\sqrt{5}+12)$; г) $(5\sqrt{7}-\sqrt{13})(\sqrt{13}+5\sqrt{7})$.

7. Разложите на множители:

а) x^2y+3yz; б) $8xy-12x^2$; в) $2ab-4a^2b$; г) $-12y^4b^3-16yb^2$.

8. Раскройте скобки:

а) $\left(\frac{3}{4}x+\frac{2}{9}\right)^2$; б) $\left(-\frac{2}{5}x-\frac{5}{2}\right)^2$; в) $\left(\frac{1}{6}a-3b\right)^2$; г) $\left(8a^2-1\frac{1}{2}b\right)^2$.

9. Перепишите и дополните:

а) $(\square+3x)^2=\square+12xy+\square$; б) $(\square-2a)^2=\square-16ab+\square$;

в) $(4x+\square)^2=\square+4xy+\square$; г) $(3a-\square)^2=\square-4ab+\square$.

10. Найдите площадь прямоугольника, стороны которого равны:

а) $(\sqrt{3}+3)$ см и $(\sqrt{27}+2)$ см; б) $(5\sqrt{5}+1)$ см и $(\sqrt{5}-1)$ см;

в) $(6\sqrt{3}-3\sqrt{2})$ см и $(6\sqrt{3}+3\sqrt{2})$ см; г) $(2\sqrt{2}-\sqrt{3})$ см и $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})$ см.

11. Найдите площадь квадрата, сторона которого равна:

а) $(7-\sqrt{2})$ см; б) $(9+\sqrt{3})$ см; в) $(2\sqrt{5}+3)$ см; г) $(\sqrt{27}-3\sqrt{2})$ см.

12. Вычислите:

а) $\sqrt{82^2-18^2}$; б) $\sqrt{65^2-63^2}$; в) $\sqrt{113^2-112^2}$; г) $\sqrt{85^2-36^2}$.

13. Упростите выражение:

а) $-(a-5)(a+3)-(1-a)^2$; б) $(x-1)(x-2)-(x-4)^2$;

в) $(2a+0,5)^2-(0,5-2a)^2$; г) $(3-2x)(3+2x)+5x^2$;

д) $25x^2+(7+5x)(7-5x)$.

14. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:

а) $\frac{3}{2-\sqrt{3}}$; б) $\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$; в) $\frac{9}{3\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; г) $\frac{12}{\sqrt{5}-\sqrt{8}}$.

15. Разложите на множители:

а) $x^2-18xy+81y^2$; б) $\frac{1}{36}x^2-xy+9y^2$;

в) $4xy+2x^2+2y^2$; г) $24xy-16x^2-9y^2$.

16. Найдите длину стороны квадрата, площадь которого равна:

а) $(7-4\sqrt{3})$ см^2; б) $(49-12\sqrt{5})$ см^2.

17. Вычислите:

а) $(\sqrt{6-\sqrt{11}}+\sqrt{6+\sqrt{11}})^2$; б) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$.

18. Вычислите $\frac{x+y}{2}\cdot\sqrt{xy}$, если:

а) $x=\sqrt{5}+2$, $y=\sqrt{5}-2$; б) $x=2\sqrt{7}-5$, $y=5+2\sqrt{7}$;

в) $x=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $y=\frac{4}{\sqrt{20}}$; г) $x=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

19. Я задумал натуральное число. Умножил его на то же число и к результату прибавил удвоенное задуманное число. Так я получил число 143. Какое число я задумал?

20. Я задумал натуральное число. Умножил его на то же число и из результата вычел удвоенное задуманное число. Так я получил число 168. Какое число я задумал?

21. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $x^2-4x=12$; б) $4x^2+12x=16$; в) $9x^2-6x=120$; г) $x^2+10x=24$.

Указание. Примените формулы $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

22. Вычислите:

а) $(\sqrt{45}-\sqrt{5})^2-(\sqrt{11}-\sqrt{13})(\sqrt{13}+\sqrt{11})$; б) $(\sqrt{3}-\sqrt{12})^2-(\sqrt{7}+\sqrt{11})(\sqrt{11}-\sqrt{7})$;

в) $\frac{7}{\sqrt{11}-2}-\frac{2}{\sqrt{11}-3}$; г) $\frac{2}{\sqrt{6}+2}+\frac{3}{\sqrt{6}+3}$.

23. Вычислите:

а) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$; б) $(\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}})^2$.

24. Зная, что $a+b=8\sqrt{5}$ и $ab=\frac{1}{\sqrt{5}}(a+b)$, вычислите a^2+b^2 єі a^4+b^4.

25. Зная, что $x^2+y^2=25$ и $(x+y)^4-(x-y)^4=40$, вычислите xy.

26. Докажите, что произведение трех последовательных натуральных чисел не является кубом какого-либо натурального числа.

27. Придумайте задачи, аналогичные задачам 18, 19, 20. Решите их.

Задача для чемпионов

28. Запишите число 2011 в виде разности квадратов натуральных чисел.

Проверочная работа

Время выполнения работы: 45 минут

1 вариант		2 вариант
1. Выполните действия, используя формулы сокращенного умножения: а) $(2a-3)(2a+3)$; б) $(m-2n)^2$.	2 б	1. Выполните действия, используя формулы сокращенного умножения: а) $(2-3a)(2+3a)$; б) $(4m+n)^2$.
2. Перепишите и заполните пропуски: $(3x+\square)^2=\square+\square+16$.	2 б	2. Перепишите и заполните пропуски: $(\square-2x)^2=49-\square+\square$.
3. Разложите на множители: $(5a+7)^2-4b^2$.	2 б	3. Разложите на множители: $9x^2-(2y+1)^2$.
4. Найдите площадь квадрата, сторона которого равна: $(2\sqrt{27}+\sqrt{3})$ см.	2 б	4. Найдите площадь квадрата, сторона которого равна: $(2\sqrt{80}-\sqrt{5})$ см.
5. Запишите в виде квадрата разности: $19-8\sqrt{3}$.	2 б	5. Запишите в виде квадрата суммы: $27+10\sqrt{2}$.

ГЛАВА 5

Алгебраические отношения

§ 1. Понятие алгебраического отношения

1 Рассмотрите, выберите и дополните:

$\frac{5}{3}$ $-\frac{2}{5}$ $\frac{9,5}{6}$ $\frac{0,4}{2}$ $\frac{1}{5}$ $-\frac{4}{3}$ $\frac{4,2}{7}$ $\frac{2,6}{3,8}$ $\frac{2}{5}$ $-\frac{0,3}{0,4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{6}{9,5}$

- Следующие отношения не являются дробями: $\frac{9,5}{6}$, $\frac{0,4}{2}$, $\frac{4,2}{7}$, $\frac{2,6}{3,8}$, $\square$, $\square$.
- Числитель отношения $\frac{4,2}{7}$ равен $\square$. Знаменатель отношения $-\frac{0,3}{0,4}$ равен $\square$.
- Значение отношения $\frac{3}{4}$ равно 0,75, а отношения $\frac{0,4}{2}$ — $\square$.
- Отношения $\frac{0,4}{2}$ и $\frac{\square}{5}$ равны.

2 Рассмотрите и дополните:

а) Если $\frac{a}{b}=0,9$, то $\frac{2a+3b}{3b}=?$

$$\frac{2a+3b}{3b}=\frac{2a}{3b}+\frac{3b}{3b}=\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{b}+\square=\frac{2}{3}\cdot\square+\square=\square.$$

Если $\frac{a}{b}=0,9$, то число $\square$ является значением отношения $\frac{2a+3b}{3b}$.

б) Если $a=2,\ b=-1,\ c=3,$ то значение выражения a^2+5b+c равно

$2^2+5\cdot\square+\square=\square$.

- **Алгебраические выражения** составлены из чисел и букв (называемых **переменными**) с помощью действий сложения, вычитания, умножения, деления, а также возведения в степень и извлечения квадратного корня.
- **Рациональные алгебраические выражения** не содержат переменных под знаком корня.

Определение. Отношение двух рациональных алгебраических выражений называется **алгебраическим отношением** (или **алгебраической дробью**).

3 Дополните:

а) При $x=1$ и $y=2$ значение алгебраического отношения $\dfrac{2x+y}{3x-y}$ равно $\dfrac{2\cdot 1+2}{3\cdot 1-\square}=\dfrac{5}{\square}=\square$.

б) При $a=0$ значение алгебраического отношения $\dfrac{a^2-2}{2-a}$ равно $\dfrac{0^2-2}{2-\square}=\dfrac{\square}{\square}=\square$.

Значение алгебраического отношения $\dfrac{a^2-2}{2-a}$ нельзя вычислить, если $2-a=0$, то есть при $a=\square$.

Значение алгебраического отношения $\dfrac{a^2-2}{2-a}$ можно найти для любого $a\in\mathbb{R}\setminus\{\square\}$.

- **Областью допустимых значений** (ОДЗ) на заданном множестве M алгебраического отношения от одной переменной является подмножество множества M, на котором знаменатель этого отношения не равен нулю.
- На множестве $\mathbb{R}$ ОДЗ алгебраического отношения $\dfrac{a^2-2}{2-a}$ равно $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Обозначим через F(x) алгебраическое отношение от переменной x. Если $a\in$ ОДЗ отношения F(x), то через F(a) обозначают значение отношения F(x) при $x=a$.

4 Рассмотрите и дополните:

Значение переменной	Значение алгебраического отношения $\dfrac{1-x}{x+5}$	Значение алгебраического отношения $\dfrac{x-x^2}{x^2+5x}$
1	$\dfrac{1-1}{1+5}=\dfrac{0}{6}=0$	$\dfrac{1-1^2}{1^2+5\cdot 1}=0$
–2	$\dfrac{1-(-2)}{\square+5}=\square$	$\dfrac{-2-(-2)^2}{(-2)^2+5\cdot\square}=\square$
3	$\dfrac{1-\square}{3+5}=\square$	$\dfrac{3-\square}{\square^2+5\cdot\square}=-0,25$

На множестве $\mathbb{R}$ ОДЗ отношения $\dfrac{1-x}{x+5}$ равно $\mathbb{R}\setminus\{\square\}$, а отношения $\dfrac{x-x^2}{x^2+5x}$ равно $\mathbb{R}\setminus\{0,\ \square\}$.

Определения.
- Два алгебраических отношения от одной и той же переменной называются **равными** на множестве M, если:
  - множество M принадлежит ОДЗ каждого отношения;
  - эти отношения имеют равные значения для любого значения переменной из множества M.
- Если E_1 и E_2 – два алгебраических выражения от одной и той же переменной, принимающие равные значения при всех значениях переменных из ОДЗ обоих выражений, то выражения E_1 и E_2 называются **тождественно равными** на этой области, а запись $E_1=E_2$ называется **тождеством**.

Алгебраические отношения $\dfrac{1-x}{x+5}$ и $\dfrac{x-x^2}{x^2+5x}$ равны для любого $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,-5\}$.

Обозначим $\frac{1-x}{x+5}=\frac{x-x^2}{x^2+5x}$, для любого $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,-5\}$.

Равенство $\frac{1-x}{x+5}=\frac{x-x^2}{x^2+5x}$ является тождеством на множестве $\mathbb{R}\setminus\{0,-5\}$.

Упражнения и задачи

1. Найдите значение алгебраического выражения $2x^2-3x$ при:
а) $x=0$; б) $x=-2$; в) $x=0{,}5$; г) $x=\frac{1}{6}$.

2. Найдите значение алгебраического выражения $4ab-b^2+a$ при:
а) $a=b=2$; б) $a=3,\ b=-2$; в) $a=-4,\ b=1{,}5$; г) $a=\frac{3}{4},\ b=\frac{4}{3}$.

3. Запишите в виде алгебраического отношения:
а) $3x:(2x+5)$; б) $(ax^2+bx):(a-b)$; в) $(2x+4):(x-3a)$; г) $12x^5:(7b-x^3)$.

4. Выберите алгебраические отношения:
а) $\frac{2x-1}{3x}$; $\frac{0{,}4x^2-\sqrt{x}}{x+1}$; $\frac{3}{ax+2}$; $\frac{5x}{-9y}$; $\frac{7x}{4}$; $\frac{\sqrt{2x-1}}{2x+1}$; $\frac{y^2+5}{y^2-5}$;
б) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5x+3}}$; $\frac{0{,}99a}{ax+4}$; $\frac{y}{x}$; $\frac{4}{\sqrt{x}}$; $\frac{\sqrt{y}}{-x^2-9}$.

5. Назовите числитель и знаменатель алгебраического отношения:
а) $\frac{0{,}9a^2+1}{2a-\sqrt{3}}$; б) $\frac{8}{-5x-3}$; в) $\frac{\sqrt{7}+x^2}{a^2x+8a}$; г) $\frac{8,(7)xy}{-7,(4)y^2-x}$.

6. Найдите значение алгебраического отношения $\frac{x^2+1}{x+1}$ при:
а) $x=1$; б) $x=0$; в) $x=0{,}5$; г) $x=1\frac{1}{2}$.

7. Найдите значение алгебраического отношения $\frac{3x+2y}{2x-y}$ при:
а) $x=y=1$; б) $x=4,\ y=2$; в) $x=\frac{1}{6},\ y=\frac{1}{2}$; г) $x=-0{,}8;\ y=0{,}4$.

8. Найдите область допустимых значений алгебраического отношения:
а) $\frac{3a}{a-4}$; б) $\frac{x^2+2x}{3+x}$; в) $\frac{a+b}{2b+6}$; г) $\frac{a-b^2}{-8+0{,}6a}$; д) $\frac{5ax+3}{2x^2-18}$; е) $\frac{a^2+2ax+1}{0{,}36-a^2}$.

9. Найдите значение алгебраического отношения $\frac{0{,}8x+1{,}2y}{x-y}$ при:
а) $x=2y$; б) $y=2x$; в) $\frac{x}{y}=1{,}3$; г) $\frac{y}{x}=-0{,}4$.

10. Дано алгебраическое отношение $F(x)=\frac{2x+1}{8-4x}$. Сравните числа:
а) $F(0)$ и $F(1)$; б) $F(-2)$ и $F(-1)$; в) $F(0{,}5)$ и $F(-0{,}5)$; г) $F(10)$ и $F(-10)$.

11. Дано алгебраическое отношение $F(x)=\dfrac{10-x^2}{x}$.

а) Расположите в порядке возрастания числа $F(-3)$, $F(-2)$, $F(-1)$, $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$.

б) Расположите в порядке убывания числа $F(-4)$, $F(4)$, $F(-0{,}5)$, $F(0{,}5)$.

12. При каких целых значениях переменной значение алгебраического отношения будет целым числом: а) $\dfrac{7}{x-2}$; б) $\dfrac{-5}{3-x}$; в) $\dfrac{9}{2+x}$; г) $\dfrac{-4}{x+10}$?

13. Используя свойства эквивалентных дробей, определите, при каких значениях переменной будут равны значения алгебраических отношений:

а) $\dfrac{8}{3-x}$ и $\dfrac{4}{2+x}$; б) $\dfrac{5}{2x-1}$ и $\dfrac{-10}{x+1}$; в) $\dfrac{\sqrt{12}}{3-3x}$ и $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{18}-\sqrt{2}x}$; г) $\dfrac{-\sqrt{5}}{x}$ и $\dfrac{\sqrt{10}}{x+1}$.

14. Равны ли на множестве $\mathbb{R}$ отношения:

а) $\dfrac{x}{x^2+4}$ и $\dfrac{x(x^2+1)}{(x^2+4)(x^2+1)}$; б) $\dfrac{1}{x-1}$ и $\dfrac{x+1}{x^2-1}$; в) $\dfrac{1}{x^2}$ и $\dfrac{x}{x^3}$?

15. Приведите примеры тождеств.

§2. Основное свойство алгебраического отношения. Сокращение отношений

2.1. Основное свойство алгебраического отношения

Рассмотрите и дополните:

$\dfrac{2{,}4}{1{,}6} = 2{,}4:1{,}6 = \bigcirc$

$\times 2$ ↓ Увеличим в 2 раза числитель и знаменатель

$\dfrac{4{,}8}{3{,}2} = 4{,}8:3{,}2 = \bigcirc$

$\dfrac{x+3}{x} \longleftarrow$ ОДЗ $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\times(x-3)$ ↓ Увеличим в $x-3$ раз числитель и знаменатель

$\dfrac{(x+3)(x-3)}{x(x-3)} = \dfrac{\square^2-9}{x^2-\square} \longleftarrow$ ОДЗ $\mathbb{R}\setminus\{0;\ 3\}$

а) Умножьте числитель и знаменатель алгебраического отношения $\dfrac{x+3}{x}$ на выражение $x+3$.

б) Сравните ОДЗ полученного отношения с ОДЗ отношения $\dfrac{x+3}{x}$.

в) Найдите значение этих двух алгебраических отношений при: $x=1$; $x=-2$; $x=5$. Что вы заметили?

Основное свойство алгебраического отношения

Умножив числитель и знаменатель отношения на ненулевое рациональное алгебраическое выражение, получим алгебраическое отношение, равное заданному на области допустимых значений обоих алгебраических отношений.

2.2. Сокращение алгебраических отношений

Рассмотрите и дополните:

$$\frac{0{,}9}{1{,}5} = 0{,}9:1{,}5 = \bigcirc$$

$:3$ ↓ Сокращаем на 3

$$\frac{\square}{0{,}5} = \square : 0{,}5 = \bigcirc$$

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2+x} = \frac{(x+1)^2}{x(x+1)} \longleftarrow \text{ОДЗ } \mathbb{R}\setminus\{0;\ -1\}$$

$:(x+1)$ ↓ Сокращаем на $x+1$

$$\frac{\square}{x} \longleftarrow \text{ОДЗ } \mathbb{R}\setminus\{\square\}$$

а) Разделите числитель и знаменатель алгебраического отношения $\dfrac{3x^2-x}{x^2-1}$ на выражение $x-1$. (Полагаем, что $x-1\neq 0$.)

б) Сравните ОДЗ полученного отношения с ОДЗ дроби $\dfrac{3x^2-x}{x^2-1}$.

в) Найдите значение обоих алгебраических отношений при: $x=0$; $x=2$; $x=-3$. Что вы заметили?

- **Сократить алгебраическое отношение** на ненулевое рациональное алгебраическое выражение – значит, разделить числитель и знаменатель этого отношения на данное выражение.
- Сократив алгебраическое отношение, получим алгебраическое отношение, равное заданному на области допустимых значений обоих алгебраических отношений.
- ОДЗ алгебраического отношения, полученного после сокращения заданного алгебраического отношения, может отличаться от ОДЗ заданного алгебраического отношения.

Определения.
- Алгебраическое отношение называется **сократимым**, если его можно сократить.
- Алгебраическое отношение называется **несократимым**, если его невозможно сократить.

Пример. Алгебраическое отношение $\dfrac{x(x-2)}{x^2-4}$ – сократимое (обоснуйте!), а отношение $\dfrac{x}{x+2}$ – несократимое.

Упражнения и задачи

1. Умножьте числитель и знаменатель дроби:

а) $\dfrac{2}{5}$ на 3; б) $\dfrac{4}{9}$ на 5; в) $-\dfrac{3}{7}$ на 4; г) $-\dfrac{5}{6}$ на 6.

2. Умножьте числитель и знаменатель отношения:

а) $\dfrac{1{,}8}{3}$ на 2,5; б) $-\dfrac{2{,}1}{4{,}4}$ на 3; в) $-\dfrac{3{,}5}{6{,}8}$ на 1,6; г) $\dfrac{0{,}7}{1{,}9}$ на 8.

3. Умножьте числитель и знаменатель алгебраического отношения:

а) $\dfrac{x}{y}$ на x; б) $\dfrac{y}{x-1}$ на y; в) $\dfrac{ab}{2+a}$ на b; г) $\dfrac{x-1}{x+1}$ на $x-1$.

4. Сократите дробь:

а) $\dfrac{24}{36}$; б) $\dfrac{96}{216}$; в) $\dfrac{81}{189}$; г) $\dfrac{180}{216}$.

5. Сократите отношение:

а) $\dfrac{2{,}8}{3{,}6}$ на 4; б) $\dfrac{3{,}25}{5{,}5}$ на 2,5; в) $\dfrac{-10{,}08}{11{,}34}$ на 1,8; г) $\dfrac{15{,}68}{25{,}56}$ на 3,2.

6. Сократите алгебраическое отношение:

а) $\dfrac{5x^3y}{10xy^2}$ на 5xy; б) $\dfrac{-3x^5y^6}{9x^3y^8}$ на $3x^3y^6$;

в) $\dfrac{2x^3-x^2y}{4x^2-y^2}$ на $2x-y$; г) $\dfrac{9x^2+12xy+4y^2}{21xy+14y^2}$ на $2y+3x$.

7. Восстановите последовательность равных отношений:

а) $\dfrac{3}{4}=\dfrac{\square}{12}=\dfrac{0{,}3}{\square}=\dfrac{\square}{11{,}2}=\dfrac{-16{,}8}{\square}$; б) $\dfrac{5}{8}=\dfrac{11}{\square}=\dfrac{\square}{12{,}8}=\dfrac{-32}{\square}=\dfrac{\square}{-28}$.

8. Восстановите последовательность равных отношений:

а) $\dfrac{x-1}{xy}=\dfrac{\square}{x^2y}=\dfrac{xy-y}{\square}=\dfrac{\square}{0{,}5x^3y+xy}$; б) $\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{x^2-y^2}{\square}=\dfrac{\square}{7y-7x}=\dfrac{3y^2-3x^2}{\square}$.

9. Определите, при каких значениях переменной будут равны значения алгебраических отношений:

а) $\dfrac{x+1}{x-1}$ и $\dfrac{x^2+x}{x^2-x}$; б) $\dfrac{2+x}{4-x^2}$ и $\dfrac{-1}{x-2}$;

в) $\dfrac{2x+3}{2x-3}$ и $\dfrac{-4x^2-12x-9}{9-4x^2}$; г) $\dfrac{x}{x-1}$ и $\dfrac{x^3+x}{x^3-x^2+x-1}$.

10. Сократите алгебраическое отношение, до несократимого:

а) $\dfrac{3(x+2)}{x^2+4x+4}$; б) $\dfrac{4a^2-4b^2}{2(b+a)^2}$; в) $\dfrac{y^2-x^2}{x^2-yx}$; г) $\dfrac{4x^2-4bx+b^2}{0{,}25b^2-x^2}$.

11. Известно, что $\dfrac{x+y}{y}=10$. Найдите $\dfrac{x^2-y^2}{y^2}$.

Занимательная математика

12. Найдите цифру единиц наименьшего натурального числа, сумма цифр которого равна 2007.

§ 3. Арифметические действия над алгебраическими отношениями. Возведение алгебраического отношения в степень с натуральным показателем

3.1. Сложение и вычитание алгебраических отношений

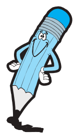
Рассмотрите и дополните:

$$\frac{3}{14}+\frac{^{2)}4}{7}=\frac{3+4\cdot\square}{14}=\frac{\square}{14}.$$

$$\frac{^{2)}2}{9}-\frac{^{3)}5}{6}=\frac{2\cdot 2-5\cdot 3}{18}=-\frac{\square}{18}.$$

$$3-\frac{8}{9}=\frac{^{\square)}3}{1}-\frac{8}{9}=$$

$$=\frac{3\cdot 9-8}{\square}=\frac{\square}{9}=\square\frac{\square}{9}.$$



$$\frac{a}{2b^2}+\frac{b-a}{2b^2}=\frac{a+b-a}{2b^2}=\frac{\square}{\square}.$$

$$\frac{^{x)}x-1}{3x}+\frac{^{3)}2}{x^2}=\frac{x(x-1)+2\cdot\square}{3x^2}=\frac{\square}{3x^2}.$$

$$\frac{^{y-1)}y-1}{y+1}-\frac{^{y+1)}y+1}{y-1}=\frac{(y-1)^2-(y+1)^2}{(y+1)(y-1)}=$$

$$=\frac{y^2-2y+1-(y^2+\square+1)}{\square^2-1}=\frac{\square}{\square^2-1}.$$

Правила сложения и вычитания алгебраических отношений

1. **Сумма двух алгебраических отношений с одинаковым знаменателем** является алгебраическим отношением, числитель которого равен сумме числителей, а знаменатель совпадает со знаменателями данных отношений.
2. Чтобы **сложить два алгебраических отношения с разными знаменателями**, нужно привести их к общему знаменателю, после чего применить правило 1.
3. Чтобы **вычесть два алгебраических отношения**, нужно к уменьшаемому прибавить противоположное вычитаемое.

Замечание. Сложение алгебраических отношений обладает теми же свойствами, что и сложение действительных чисел (ассоциативность, коммутативность и т. д.).

3.2. Умножение и деление алгебраических отношений

1 Рассмотрите и дополните:

$$\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{11}=\frac{5\cdot 2}{7\cdot 11}=\frac{\square}{\square}.$$

$$-\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{12}=-\frac{3\cdot 5^{(3}}{8\cdot 12}=-\frac{5}{8\cdot\square}=-\frac{\square}{\square}.$$

$$\frac{21}{16}:\frac{7}{8}=\frac{21}{16}\cdot\frac{\square}{7}=$$

$$=\frac{21\cdot\square^{(7\cdot 8}}{16\cdot 7}=\frac{3\cdot\square}{\square\cdot 1}=\frac{\square}{\square}.$$

$$1\frac{2}{3}:\frac{5}{6}=\frac{5}{3}:\frac{5}{6}=$$

$$=\frac{5}{3}\cdot\frac{\square}{\square}=\frac{\square\cdot\square^{(\square\cdot\square}}{3\cdot\square}=\square.$$

$$\frac{2y-1}{y+3}\cdot\frac{(y+3)^2}{2y}=\frac{(y+3)^2(2y-1)^{(y+3}}{(y+3)\cdot 2y}=$$

$$=\frac{\square(y+3)}{2y}=\frac{2y^2+\square y-3}{2y}.$$

$$\frac{a^2-ab}{b}\cdot\frac{b^2}{a}=\frac{(a^2-ab)\cdot b^{2\,(b}}{ba}=$$

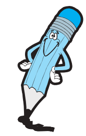
$$\frac{(a^2-ab)\cdot\square}{a}=\frac{\square(a-b)\square^{(a}}{a}=(a-b)\square.$$

$$\frac{x^2-y^2}{3x^2y^2}:\frac{x+y}{xy}=\frac{x^2-y^2}{3x^2y^2}\cdot\frac{\square}{x+y}=$$

$$=\frac{(x+y)(\square)\cdot\square^{(\square\cdot(x+y)}}{3(\square)^2\cdot(x+y)}=\frac{\square}{3\square}.$$

2 Рассмотрите и дополните:

- Обратным для отношения $\dfrac{3}{7}$ является отношение $\dfrac{7}{3}$.
- Обратным для отношения $4\dfrac{1}{5}$ является отношение $\dfrac{5}{\square}$.
- Обратным для отношения $\dfrac{x-1}{x}$ является отношение $\dfrac{x}{x-1}$.
- Обратным для отношения $\dfrac{8}{x^2-y}$ является отношение $\dfrac{\square}{\square}$.



Правила умножения и деления алгебраических отношений

1. Чтобы **умножить два алгебраических отношения**, нужно перемножить их числители и знаменатели и первое произведение записать в числителе отношения, а второе – в знаменателе.
2. Чтобы **разделить одно алгебраическое отношение на другое**, нужно делимое умножить на отношение, обратное делителю.
3. Если полученное алгебраическое отношение сократимо, то его сокращают до несократимого отношения.

Замечание. Умножение алгебраических отношений обладает теми же свойствами, что и умножение действительных чисел (ассоциативность, коммутативность, дистрибутивность умножения относительно сложения).

3.3. Возведение алгебраического отношения в степень с натуральным показателем

Рассмотрите и дополните:

$$\left(\frac{3}{8}\right)^2=\frac{3^2}{8^2}=\frac{\square}{64}$$

$$\left(\frac{5^2\cdot 2^3}{0{,}1}\right)^2=\frac{5^{2\cdot\square}\cdot 2^{3\cdot 2}}{0{,}1^{\square}}=$$

$$=\frac{5^{\square}\cdot 2^{\square}}{\square}=\square$$

$$\left(\frac{x^3y}{x-1}\right)^2=\frac{x^{3\cdot\square}\cdot y^{\square}}{(x-1)^2}$$

$$\frac{a^2}{2b^3}\cdot\frac{a^3}{b^4}=\frac{a^2\cdot a^3}{2b^3\cdot b^4}=\frac{a^{\square}}{2b^{\square}}$$

$$\left(\frac{2x^3-5y+1}{3x-8y^2}\right)^0=\square$$

Чтобы **возвести алгебраическое отношение в степень с натуральным показателем**, надо возвести в эту степень числитель и знаменатель отношения.

Замечание . В вычислениях со степенями алгебраических отношений применяют те же свойства, что и в вычислениях со степенями действительных чисел.

Упражнения и задачи

1. Вычислите:

а) $\frac{7}{12}+\frac{5}{12}$; б) $\frac{21}{14}-\frac{9}{14}$; в) $\frac{29}{47}+\left(-\frac{31}{47}\right)$; г) $-\frac{25}{39}-\left(-\frac{18}{39}\right)$.

2. Вычислите:

а) $\frac{5}{8}+\frac{3}{4}$; б) $-\frac{11}{12}+\frac{11}{20}$; в) $\frac{8}{9}-\frac{8}{15}$; г) $\frac{7}{16}-\left(-\frac{11}{12}\right)$; д) $-\frac{14}{21}+\left(-\frac{15}{28}\right)$.

3. Выполните действие:

а) $\frac{3}{xy}+\frac{10}{xy}$; б) $\frac{a}{a-b}+\frac{b}{a-b}$; в) $\frac{12x}{x^2+1}-\frac{8x}{x^2+1}$; г) $\frac{4y^3}{x-y^2}+\frac{3xy+y^3}{y^2-x}$.

4. Выполните действие:

а) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$; б) $\frac{6}{xy}+\frac{2}{x}$; в) $\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}-\frac{x-a}{x+a}$; г) $\frac{5}{2x^3+2x}-\frac{1}{2x}$.

5. Вычислите:

а) $\frac{12}{17}\cdot\frac{3}{5}$; б) $\frac{9}{10}\cdot\left(-\frac{7}{8}\right)$; в) $-\frac{15}{22}\cdot\frac{2}{5}$; г) $-\frac{8}{27}\cdot\left(-\frac{9}{16}\right)$.

6. Выполните действие:

а) $\frac{x}{y}\cdot\frac{3x}{y^2}$; б) $\frac{5x^2y}{y-1}\cdot\frac{2xy}{y+1}$; в) $\frac{4(x+1)}{x-2}\cdot\frac{x-1}{x-2}$; г) $\frac{8y}{7xy+7x}\cdot\frac{y+1}{y}$.

7. Вычислите:

а) $\frac{33}{40}:\frac{3}{10}$; б) $-\frac{25}{32}:\frac{5}{8}$; в) $\frac{27}{60}:\left(-\frac{9}{15}\right)$; г) $-\frac{84}{287}:\left(-\frac{21}{41}\right)$.

8. Найдите отношение, обратное алгебраическому отношению:

а) $\frac{3x}{4y}$; б) $\frac{ax-b}{b+ay}$; в) $\frac{7x-5}{3x^2}$; г) $\frac{4y}{25-x^2}$.

9. Выполните действие:

а) $\frac{ab^2}{xy}:\frac{b}{x}$; б) $-\frac{x^2-1}{x^2+4x+4}:\frac{x+1}{x+2}$;

в) $\frac{x^2+2x}{xy+2x}:\left(-\frac{x+2}{2+y}\right)$; г) $\frac{4x-16}{x+3}:\frac{4xy-16y}{8x^2+24x}$.

10. Выполните возведение в степень:

а) $\left(\frac{6}{7}\right)^2$; б) $\left(\frac{-3}{5}\right)^3$; в) $\left(\frac{4}{5}\right)^4$; г) $\left(\frac{3^4\cdot5^3}{2^5}\right)^2$.

11. Выполните действие:

а) $\left(\frac{xy}{3a}\right)^3$; б) $\left[\frac{x(x+y)}{x-y}\right]^2$; в) $\left(\frac{x^2a}{y^5b^3}\right)^3$; г) $\left[\frac{2(x-1)}{3a+b}\right]^2$.

12. Выполните действие:

а) $\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}$; б) $\frac{3x+2}{x^2+2x+1}-\frac{4}{x+1}$; в) $\frac{-3(x+a)}{ax+ay}+\frac{3x}{x^2+xy}$.

13. Запишите в виде алгебраического отношения: а) $\frac{x-y}{x+y}+1$; б) $x+y-\frac{x^2+y^2}{x+y}$.

14. Найдите значение алгебраического отношения $\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-y^2+1}$ при:

а) $x=1+\sqrt{2},\ y=\sqrt{2}-1$; б) $x=\sqrt{5}-2,\ y=\sqrt{5}+2$.

15. Докажите, что:

а) $\left(\frac{2a}{a^2-4}-\frac{2}{a-2}+\frac{1}{a+2}\right):\frac{a-6}{4(a+2)}=\frac{4}{a-2}$;

б) $\frac{a^2-1}{a^2+1}\cdot\left(\frac{a}{a-1}-\frac{1}{a+1}\right):\frac{a^2+2a+1}{1-a^2}=\frac{1-a}{a+1}$.

16. Составьте алгебраическое отношение от переменных x и y, значение которого равно:

а) $-\frac{2}{5}$ при $x=y=1$; б) 0,8 при $x=y=-1$;

в) $\sqrt{5}$ при $x=1$ и $y=-1$; г) 0 при $x=2$ и $y=3$.

Упражнения и задачи на повторение

1. Выберите алгебраические отношения:

а) $\frac{3x-\sqrt{x}}{2x}$, $\frac{9x+\sqrt{8}}{2x+y}$, $\frac{\sqrt{3}x}{5}$, $\frac{9x^2+bx+c}{a-b}$, $\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$, $\frac{ax+y}{2\sqrt{3}+x^2}$;

б) $\frac{x}{y}$, $\frac{2}{x}$, $\frac{5-x^2}{\sqrt{y+x}}$, $\frac{\sqrt{20-x^2}}{\sqrt{5-x}}$, $\frac{0{,}7xy}{0{,}2ab}$, $\frac{(1+xy)^2}{(1-xy)^2}$.

2. Найдите значение алгебраического отношения $\frac{5-4xy}{x^2+1}$ при:

а) $x=y=0$; б) $x=-1,\ y=1$; в) $x=0,\ y=-1$; г) $x=2,\ y=-1$.

3. Найдите область допустимых значений алгебраического отношения:

а) $\frac{y-1}{-3-0{,}3x}$; б) $\frac{5x-9}{-4x^2+16}$; в) $\frac{x-y}{x^2+x}$; г) $\frac{15y}{2x^3-x^2}$.

4. Умножьте числитель и знаменатель алгебраического отношения:

а) $\dfrac{x+3}{2x-1}$ на $2x+1$; б) $\dfrac{x+\sqrt{7}}{x-\sqrt{7}}$ на $x+\sqrt{7}$;

в) $\dfrac{x-y}{3x-y}$ на $3x+y$; г) $\dfrac{4x-y}{y+4x}$ на $y+4x$.

5. Сократите алгебраическое отношение:

а) $\dfrac{3x+9}{x^2+6x+9}$; б) $\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}$; в) $\dfrac{a^2-ax}{x^2-a^2}$; г) $\dfrac{x^2-4}{2x-x^2}$.

6. Выполните действие:

а) $\dfrac{1}{x^2y}+\dfrac{2}{xy^2}$; б) $\dfrac{5}{x-2y}-\dfrac{3}{x+2y}$; в) $\dfrac{x-1}{2x-6}+\dfrac{1}{3-x}$; г) $\dfrac{5}{x^2-16}-\dfrac{7}{x-4}$.

7. Выполните действие:

а) $\dfrac{(x+1)^3}{(x-2)^4}\cdot\dfrac{(x-2)^3}{x+1}$; б) $\dfrac{xy^2}{x+y}\cdot\dfrac{(x+y)^2}{xy}$; в) $\dfrac{3ab}{25yx^4}\cdot\dfrac{15x^2y^2}{18a^2b^3}$; г) $\dfrac{\sqrt{3}a^2x}{1{,}2yz^2}\cdot\dfrac{\sqrt{12}y^2}{5a}$.

8. Выполните действие:

а) $\dfrac{3x-6}{3x-1}:\dfrac{xy-2y}{9x^2-1}$; б) $\dfrac{2-x}{3x+12}:\dfrac{x^2-4}{4x+x^2}$; в) $\dfrac{ab^3}{6-6x}:\dfrac{x^2-2x+1}{a^3b^3}$; г) $\dfrac{3ab}{ax+3x}:\dfrac{6ba^2}{9+6a+a^2}$.

9. Упростите:

а) $\dfrac{ax+ay-bx-by}{xy+x^2}$; б) $\dfrac{x^2-2x+1}{y-xy+z-zx}$; в) $\dfrac{y^2+x^2-2xy}{xz-yz+ty-xt}$; г) $\dfrac{xy-xz-y^2+yz}{x^2-xy}$.

10. Раскройте квадратные скобки:

а) $\left[\dfrac{a(x+1)^2}{b(x-1)}\right]^3$; б) $\left[\dfrac{x^2(x-1)}{y^3(x+1)^2}\right]^4$; в) $\left[\dfrac{ab^2x^3}{(a-b^2)^2y^4}\right]^2$; г) $\left[\dfrac{\sqrt{5}(a^2-x)^2}{\sqrt{3}y^2x}\right]^4$.

11. Запишите в виде алгебраического отношения:

а) $\left(x-\dfrac{b}{a}\right)^2$; б) $\left(\dfrac{x}{y}-3\right)^2$; в) $\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}$; г) $\dfrac{2}{2a+3}-\dfrac{1}{3-2a}$.

12. Упростите выражение:

а) $\dfrac{a^2-4a+4}{a^2+ab^2-2a-2b^2}$; б) $\dfrac{x^2+2x+2y^2-y^4}{x^2-xy^2+2y^2-4}$;

в) $\left(\dfrac{x-y}{x^2-xy}-\dfrac{1}{x^2-y^2}:\dfrac{x+y}{(y-x)^2}\right):\dfrac{y^2}{(x+y)^2}$; г) $\left(\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{ab}{a^2-b^2}\right):\dfrac{4a^2}{a^2-2ab+b^2}$.

13. Упростите выражение и найдите значение этого выражения при $x=-1{,}8$ и $y=0{,}6$.

а) $\left(\dfrac{x^2}{x+y}-\dfrac{x^3}{x^2+y^2+2xy}\right):\left(\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{x^2}{x^2-y^2}\right)$; б) $\dfrac{x+y}{x+2y}:\left(\dfrac{x}{x-2y}+\dfrac{y^2}{x^2-4y^2}\right)$;

в) $\dfrac{x^2}{x^2-2xy}:\left(\dfrac{2xy}{x^2-4y^2}-\dfrac{y}{x+2y}\right)$; г) $\left(\dfrac{2xy}{x^2-9y^2}-\dfrac{y}{x-3y}\right):\dfrac{y^2}{x^2+3xy}$.

14. Упростите выражение:

а) $\dfrac{8x-4x^2-4}{(x^2-1)(1-x)}+\dfrac{(1+x)(x-1)}{1-x}\cdot\dfrac{x}{(x+1)(x^2-2x+1)}+\dfrac{x}{x^2+1-2x};$

б) $\dfrac{8x^2-24x+18}{9+6x}\cdot\dfrac{4x^2+12x+9}{15-10x}\cdot\dfrac{15x}{4x^2-9}.$

15. Докажите, что:

а) $\dfrac{x}{x^2-6x+9}:\left(\dfrac{1}{3+x}-\dfrac{1}{3-x}-\dfrac{3x}{x^2-9}\right)=\dfrac{3+x}{3-x};$

б) $\left(1+\dfrac{7}{a-3}\right)\cdot\left(\dfrac{a+5}{a^2+a-12}+\dfrac{a}{a+4}-\dfrac{4}{a-3}\right)(3-a)^2=a^2-6a-11.$

16. Докажите, что:

а) $(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)\cdot\ldots\cdot(x^{16}+y^{16})=\dfrac{x^{32}-y^{32}}{x-y};$

б) $\dfrac{x^{2^{10}}-y^{2^{10}}}{x-y}=(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)\cdot\ldots\cdot(x^{2^9}-y^{2^9}).$

17. Составьте по одному упражнению, аналогичному упражнениям 9 и 14.

Проверочная работа

Время выполнения работы: 45 минут

1 вариант

1. Дополните: 2б

ОДЗ алгебраического отношения $\dfrac{7x-\sqrt{2}}{-2x-9}$ равно $\mathbb{R}\setminus\{\quad\}$.

2. Найдите значение алгебраического отношения $\dfrac{x^2-y^2}{xy}$ при $x=1-\sqrt{3}$, $y=1+\sqrt{3}$. 2б

3. Умножьте числитель и знаменатель алгебраического отношения $\dfrac{\sqrt{3}x-4}{\sqrt{3}x+4}$ на $4-\sqrt{3}x$ 2б

4. Сократите алгебраическое отношение: 2б

$$\frac{3a^2-12ab+12b^2}{a^2-4b^2}.$$

5. Запишите в виде несократимого алгебраического отношения: 2б

$$\frac{a^2-4a+4}{b+b^3}:\frac{2-a}{b^2+1}.$$

2 вариант

1. Дополните:

ОДЗ алгебраического отношения $\dfrac{5x+\sqrt{8}}{-3x+7}$ равно $\mathbb{R}\setminus\{\quad\}$.

2. Найдите значение алгебраического отношения $\dfrac{x+y}{x^2y^2}$ при $x=\sqrt{2}-1$, $y=\sqrt{2}+1$.

3. Умножьте числитель и знаменатель алгебраического отношения $\dfrac{\sqrt{5}x-1}{1+\sqrt{5}x}$ на $\sqrt{5}x+1$.

4. Сократите алгебраическое отношение:

$$\frac{9x^2-4}{18x^2+24x+8}.$$

5. Запишите в виде несократимого алгебраического отношения:

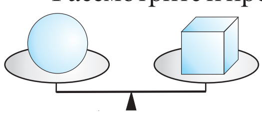
$$\frac{3a+2}{a-\sqrt{3}}:\frac{4+6a}{5a^2-15}.$$

ГЛАВА 6 Уравнения и неравенства

§1. Понятие уравнения. Повторение и дополнения

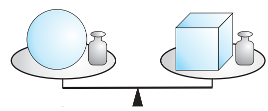
1.1. Отношение равенства на множестве действительных чисел

• Рассмотрите и прокомментируйте.



$a = b$

$a = b,\ a, b \in \mathbb{R}$



$a + c = b + c$

① $a + c = b + c,\ c \in \mathbb{R}$

② $a - c = b - c,\ c \in \mathbb{R}$

③ $ac = bc,\ c \in \mathbb{R}^*$

④ $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{c},\ c \in \mathbb{R}^*$

1.2. Уравнения с одним неизвестным. Равносильные уравнения

1 Предприниматель планировал продать 600 кг апельсинов по цене 15 леев за килограмм. Однако при транспортировке 100 кг апельсинов испортилось. На сколько леев должен поднять цену предприниматель, чтобы получить намеченную прибыль?

Объясняем

Пусть цену нужно поднять на x леев, тогда: $\boxed{(15 + x) \cdot 500 = 15 \cdot 600}$

неизвестное — уравнение с одним неизвестным

$(15 + x) \cdot 500 = 9000$ ④ $15 + x = 9000 :$ ____ ② $x =$ ____ *Ответ*: На ____ леев.

Определение. Равенство вида $A(x) = B(x)$, где $A(x)$ и $B(x)$ – выражения от x, называется **уравнением с одним неизвестным**.

Левая часть уравнения $\longrightarrow A(x) = B(x) \longleftarrow$ Правая часть уравнения

2 Является ли число **–1** решением следующих уравнений:

а) $3x+5=2(2x+3)$;

б) $(y+1)(y-\sqrt{3})=0$;

в) $t^2+1=0$;

г) $2(z+1)-7=2z-5$?

Образец:
$3x+5=2(2x+3)$
$3\cdot(-1)+5=2\cdot[2\cdot(-1)+3]$
$2=2$ – Верно.
Ответ: Число –1 – решение данного уравнения.

Определение. **Решением** уравнения с одним неизвестным называется значение неизвестного, при котором уравнение обращается в истинное равенство.

Итак, x_0 является решением уравнения $A(x)=B(x)$, если верно высказывание $A(x_0)=B(x_0)$.

- **Решить уравнение** – значит, найти множество его решений.
- Множество решений уравнения, как правило, обозначают буквой S.
- Уравнение на заданном числовом множестве может иметь одно решение, конечное множество решений, бесконечное множество решений, не иметь решений.

Например, уравнение $(x+1)(x-\sqrt{3})=0$ на множестве $\mathbb{R}$ решается следующим образом:

$x+1=0$ или $x-\sqrt{3}=0$

$x=-1$ или $x=$ $\square$. $S=\{\square\}$

• Решите уравнение на множестве $\mathbb{Q}$, затем на множестве $\mathbb{N}$.

3 Определите, в какой из ящиков нужно отправить каждое из уравнений:

$3x+5=2(2x+3)$, $(x+1)(x-\sqrt{3})=0$, $x^2+1=0$, $2(x+1)-7=2x-5$.

Одно решение на $\mathbb{R}$	Два решения на $\mathbb{R}$	Нет решений на $\mathbb{R}$	Множество решений на $\mathbb{R}$

• Что изменится, если на табличках заменить $\mathbb{R}$ на $\mathbb{N}$?

4 Рассмотрите и дополните так, чтобы получить решение уравнения на множестве $\mathbb{R}$:

$2-(x-4)-3x=7 \Leftrightarrow -x-3x=\square+7 \Leftrightarrow -4x=\square \Leftrightarrow x=\square$

Ответ: $S=\{\square\}$.

Чтобы решить уравнение, его заменяют более простым равносильным уравнением.

Определение. Два **уравнения** называются **равносильными** (**эквивалентными**), если множества их решений совпадают.

Между равносильными уравнениями пишут знак $\Leftrightarrow$ (читается: „равносильно“ или „эквивалентно“).

При замене уравнения равносильным ему уравнением применяют правила, основанные на свойствах отношения равенства:

> 1* В уравнении можно переносить слагаемое из одной части в другую, изменив при этом его знак на противоположный.
>
> 2* Обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же, отличное от нуля, число.

Применяем

$$5(7-2x)=15(x-1)\overset{2^*}{\Leftrightarrow} 7-2x=3\cdot(x-1)\Leftrightarrow \underset{2^*}{7}-2x=3x-\square \overset{1^*}{\Leftrightarrow}$$

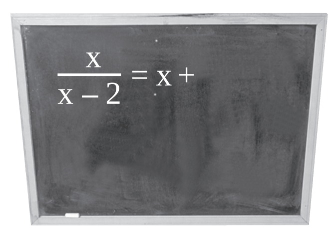
$$\Leftrightarrow -3x-2x=\square-\square\Leftrightarrow -5x=\square\Leftrightarrow x=\square.$$

Ответ: S = { $\square$ }.

• Между какими парами уравнений можно поставить знак $\Leftrightarrow$? Объясните ответ.

$3(x-8)=9x$	○	$x-8=3x$
$x(x-1)=2x$	○	$x-1=2$
$4x-3=x+2$	○	$4x-x=2+3$
$2x+7=2-3x$	○	$2x+3x=7-2$

1.3. Область допустимых значений (ОДЗ) уравнения



На доске было записано уравнение, но перед уроком часть его случайно стер дежурный.

Учитель посмотрел на оставшуюся часть и спросил:

– Могло ли число 2 быть решением данного уравнения?

Объясняем

При $x=2$ выражение $\dfrac{x}{x-2}$ не имеет смысла, поэтому число 2 не могло быть решением этого уравнения.

> **Определение.** Множество значений x, при которых имеют смысл выражения $A(x)$ и $B(x)$ уравнения $A(x)=B(x)$, называется **областью допустимых значений (ОДЗ)** этого уравнения.

Уравнения решают на их ОДЗ.

• Рассмотрите и дополните:

$2x-3=5$ → ОДЗ: $\mathbb{R}$

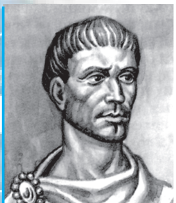
$2(x-7)=4$ → ОДЗ: $\square$

$\dfrac{2}{x+1}=1$ → ОДЗ: $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{2}{x+5}$ → ОДЗ: $\mathbb{R}\setminus\{\square,\square\}$

$\dfrac{3}{\square}=6$ → ОДЗ: $\mathbb{R}^*$

Из истории


Диофант Александрийский (III в. до н. э.)

Впервые обозначил неизвестную величину буквой древнегреческий математик Диофант Александрийский. Первое описание преобразований уравнений встречается в трудах арабского математика аль-Хорезми. Перенесение слагаемых из одной части в другую аль-Хорезми называл „уничтожением“ и „восстановлением“.

„Восстановление“ по-арабски – **аль-джебр**. От этого слова и произошло название *Алгебра*.


Аль-Хорезми (787–850)

Упражнения и задачи

1. Запишите в виде равенства предложение:
а) Число 20 на 8 больше, чем число x. б) Число x в три раза меньше числа $x+2$.
Как называются полученные равенства?

2. Отметьте букву, соответствующую правильному ответу.
Число –2 является решением уравнения:
A $x^2+4=0$. B $(x-2)^2=-4$. C $(x+1)(x+2)=0$. D $-4x=-8$.

3. Покажите, что:
а) число 4 является решением уравнения $3(x-1)=5+x$;
б) число –1 не является решением уравнения $7x+2=5x^2$.

4. Какие из элементов множества $M=\{0;\ 1;\ -1;\ 2\}$ являются решением уравнения:
а) $x(x+2)=0$; б) $x^2-1=0$?

5. Сколько решений имеет уравнение $3x-1=7$:
а) на множестве $\mathbb{R}$; б) на множестве $\mathbb{Z}$?

6. Сколько решений имеет уравнение $\sqrt{3}\cdot x-3=0$:
а) на множестве $\mathbb{R}$; б) на множестве $\mathbb{Q}$?

7. Дополните так, чтобы множеством решений полученного уравнения являлось:
а) $S=\varnothing$; б) $S=\mathbb{R}$.
$$2x+1=2x+\boxed{}$$

8. *Истинно* или *ложно*?
а) $2x-9=x \Leftrightarrow 2x+x=9$; б) $12(3+x)=8x \Leftrightarrow 3(3+x)=4x$;
в) $5x+1=x-1 \Leftrightarrow 5x-x=0$; г) $(x+1)(x+2)=2(x+1) \Leftrightarrow x+2=2$.

9. Найдите ОДЗ уравнения:
а) $\dfrac{2}{x}+3=1$; б) $x-4=\dfrac{48}{3x-12}$; в) $x^2-x=0$; г) $\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{1}{x-1}$.

10. Определите количество решений уравнения на множестве:
а) $8x+2=0$; б) $x+4=x-2$; в) $(x+1)\cdot 2=2x+2$.
11. Запишите в виде равенства:
а) Среднее арифметическое чисел 7 и x равно их произведению.
б) Число x составляет 12 % от числа 25.
12. Используя верное равенство $5\cdot 2-3=3\cdot 2+1$, составьте уравнение, множество решений которого $S=\{2\}$.
13. Дополните так, чтобы полученное уравнение:
а) не имело решений на множестве $\mathbb{Z}$, но имело решения на множестве $\mathbb{Q}$.
б) имело решения на множестве $\mathbb{R}$, но не имело решений на множестве $\mathbb{Q}$.

$$\boxed{\quad}\, x=18$$

14. Дополните так, чтобы получить уравнение, равносильное данному:
а) $\dfrac{2x-1}{3}=x \Leftrightarrow 2x-1=\boxed{\quad}$; б) $2x-(6x-5)=45 \Leftrightarrow 2x-6x=\boxed{\quad}$.
15. Найдите ошибку в решении: $7x-14=5x-10 \Leftrightarrow 7(x-2)=5(x-2) \Leftrightarrow 7=5$ – Ложно.
Ответ: $S=\varnothing$.
16. Дано уравнение $|x|=x$ на множестве $\mathbb{R}$.
а) Является ли число 7 решением этого уравнения? б) А число –7?
в) Найдите множество решений этого уравнения.
17. Найдите ОДЗ уравнения: а) $\dfrac{x}{x^2-1}=2$; б) $\sqrt{x}+1=3$; в) $\dfrac{2}{x^2+4}=1$; г) $\dfrac{4}{|x|}=1$.

18. Дополните так, чтобы множеством решений полученного уравнения являлось:
а) $S=\{1\}$; б) $S=\{0\}$; в) $S=\{-1\}$; г) $S=\varnothing$.

$$4x-3=3x+\boxed{\quad}$$

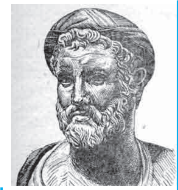
19. Составьте уравнение, множество решений которого:
а) $S=\varnothing$; б) $S=\mathbb{R}$; в) $S=\{\sqrt{2}\}$; г) $S=\{0;-2\}$.
20. Составьте уравнение, которое имеет одно решение на множестве $\mathbb{R}$, но не имеет решений на множестве $\mathbb{Q}$.
21. Составьте уравнение, которое имеет одно решение на множестве $\mathbb{Q}$, но не имеет решений на множестве $\mathbb{Z}$.
22. Отметьте букву, соответствующую правильному ответу.
Множеством решений уравнения $|x|=-x$ является:
A. $S=\varnothing$; B. $S=\mathbb{R}_+$; C. $S=\mathbb{R}_-$; D. $S=\mathbb{R}_-^*$.
23. Определите, равносильны ли уравнения:
а) $x^2=9$ и $x=3$; б) $|x|=2$ и $x=2$; в) $|x|=0$ и $x=0$; г) $x^2=4$ и $|x|=2$.

Занимательная математика

24. Почему при любом значении x значение выражения $3(2x-8)-4(1{,}5x-8{,}5)$ одно и то же?

§ 2. Уравнение I степени с одним неизвестным

2.1. Решение уравнений I степени с одним неизвестным



Пифагор

1 Однажды на вопрос: „Который час?“ греческий математик и философ Пифагор ответил: „До конца суток осталось дважды от $\frac{2}{5}$ того, что уже прошло от начала”.
Который был час?

Объясняем

Пусть от начала суток прошло x часов. Тогда до конца суток осталось $2\cdot\frac{2}{5}x=\frac{4}{5}x$ часов. Итак, $x+\frac{4}{5}x=\frac{9}{5}x$ – составляют сутки. Значит, $\boxed{\frac{9}{5}x=24}$

уравнение I степени с одним неизвестным

$$\frac{9}{5}x=24 \quad\Leftrightarrow\quad x=24:\frac{9}{5} \quad\Leftrightarrow\quad x=\square\,.$$

Ответ: $\square$ часов и $\square$ минут.

$\boxed{ax+b=0,\ \ a,\,b\in\mathbb{R},\ \ a\neq 0}$ ← **уравнение** I **степени с одним неизвестным** (общий вид)

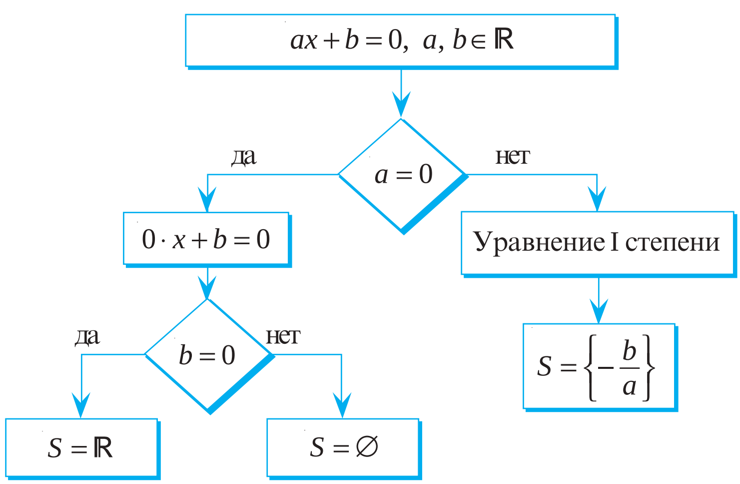
коэффициент при неизвестном; неизвестное; свободный член

Уравнение $ax+b=0,\ a,\,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0$, имеет единственное решение: $-\frac{b}{a}$.
Значит, $S=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

• Дополните:

$3x-2=0$	$\frac{1}{2}x+1=0$	$\frac{2}{5}x-\frac{3}{4}=0$	$-0{,}1x+8=0$
S = { $\square$ }	S = { $\square$ }	S = { $\square$ }	S = { $\square$ }

• Рассмотрите схему и объясните, как решается на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\mathbb{R}$.



2 Бутылка, наполненная растительным маслом, весит 800 г. После того, как ее опустошили наполовину, она стала весить 425 г. Сколько весит пустая бутылка?

Решение:

Пусть x г – вес пустой бутылки, тогда $(800-x)$ г – вес масла в полной бутылке. Значит,

$$x+\frac{800-x}{2}=425 \Leftrightarrow 2x+800-x=850 \Leftrightarrow 2x-x=850-\square \Leftrightarrow x=\square.$$

Ответ: $\square$ г.

2.2. Уравнения I степени с параметром

(дополнительный материал)

1 Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $mx=10$.

Решение:

Заметим, что уравнение $mx=10$, где x – неизвестное, содержит коэффициент m, который называется **параметром**.

1) При $m=0$ получим уравнение $0\cdot x=10$, которое не имеет решений, т. е. $S=\varnothing$.

2) При $m\neq 0$ получим уравнение I степени $mx=10$, решением которого является число $\frac{10}{m}$, т. е. $S=\left\{\frac{10}{m}\right\}$.

Ответ: $S=\varnothing$, при $m=0$; $S=\left\{\frac{10}{m}\right\}$, при $m\neq 0$.

2 Решите на множестве $(m^2-4)x=m+2$, где m – действительный параметр.

Решение:

$$(m^2-4)x=m+2 \Leftrightarrow (m-2)(m+2)x=m+2$$

$m=2$	$m=-2$	$m\in\mathbb{R}\setminus\{\pm2\}$
$0\cdot x=4$	$0\cdot x=0$	$(m-2)(m+2)x=m+2$
$S=\varnothing$	$S=\mathbb{R}$	$S=\left\{\frac{1}{m-2}\right\}$

уравнение I степени

Ответ: $S=\varnothing$, при $m=2$; $S=\mathbb{R}$, при $m=-2$;

$S=\left\{\frac{1}{m-2}\right\}$, при $m\in\mathbb{R}\setminus\{\pm2\}$.

Упражнения и задачи

1. а) Из данных уравнений определите уравнения I степени с одним неизвестным.
б) В каждом из отобранных уравнений назовите коэффициент при неизвестном и свободный член.

$-2x=2$ $\quad 3x+5=0$ $\quad \frac{5}{x}+1=0$ $\quad 2x^2-6=0$ $\quad \frac{x}{5}-1=0$ $\quad 0\cdot x=2$

2. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:
а) $7x=21$; б) $9x=3$; в) $5x-\frac{2}{3}=0$; г) $4x-\frac{1}{7}=0$;
д) $\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}=0$; е) $0{,}2x-10=0$; ж) $-10x+0{,}2=5$; з) $24x+1=9$.

3. При каких действительных значениях переменного равны выражения:
а) $3x+2$ и $2x-1$; б) $2{,}5y-4$ и $5y+2{,}4$;
в) $3z+4$ и $3-2z$; г) $\sqrt{2}-7x$ и $2x-2\sqrt{2}$?

4. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:
а) $5x+4=25-2x$; б) $2z-4=8-z$; в) $6{,}5y-15=4y+3{,}4$;
г) $3x-35=7x-28$; д) $5(x-7)=3(x-4)-13$; е) $3(2z+7)+4=5(z-3)$;
ж) $\frac{4}{5}x-2=2\frac{1}{2}x-\frac{1}{5}$; з) $2\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}=2\frac{1}{3}x+1$; и) $-2x=3(x-5)+6$.

5. Найдите нули функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, если:
а) $f(x)=2x+1$; б) $f(x)=3-5x$; в) $f(x)=\sqrt{10}x$; г) $f(x)=\frac{1}{2}x-7{,}2$.

6. Найдите ОДЗ алгебраической дроби: а) $\frac{x}{3x+0{,}2}$; б) $\frac{1-x}{\frac{2}{3}x-5}$; в) $\frac{3x}{2{,}8-0{,}1x}$.

7. Продолжите решение:
а) $\frac{3x-1}{5}-\frac{5x+1}{6}=\frac{x+1}{8}-3 \Leftrightarrow 24\cdot(3x-1)-20\cdot(5x+1)=$
$=\boxed{}\cdot(x+1)-3\cdot 120 \Leftrightarrow \ldots$
б) $\frac{4x+1}{3}-\frac{3x-1}{5}=15-\frac{25-x}{4} \Leftrightarrow 20\cdot(4x+1)-\boxed{}(3x-1)=$
$=15\cdot 60-\boxed{}\cdot(25-x) \Leftrightarrow \ldots$

8. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:
а) $\frac{8x-1}{5}-1=\frac{50-2x}{9}+\frac{3x+3}{4}$; б) $\frac{3y+1}{3}-\frac{16-y}{6}-\frac{9y+1}{7}=3$.

9. При каком действительном значении x значение выражения $8x-3$ в три раза больше значения выражения $5x+6$?

10. При каком действительном значении x значение выражения $3x+2$ составляет 25 % от значения выражения $x+15$?

11. Дополните так, чтобы полученное уравнение имело множество решений $S=\{2\}$:
а) $\boxed{}\,x-4=12$; б) $3x+\boxed{}=15$; в) $-5x+8=\boxed{}$; г) $4x+\boxed{}=x+1$.

12. Запишите каждое предложение в виде уравнения и решите его на множестве $\mathbb{R}$:
а) Если число x увеличить на 12 %, то получим число 56.
б) Если число x уменьшить на 30 %, то получим число 28.
в) Число $3x$ на 10 больше числа x.
г) Разность чисел 15 и $2x$ в 6 раз больше, чем $\frac{1}{2}x$.

13. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:
а) $(x-3)(x+4)-2(3x-2)=(x-4)^2$; б) $(x+5)(x+2)-3(4x-3)=(x-5)^2$;
в) $x(x+2)-13=(x-3)(x+3)$; г) $4x(x-1)=(2x+5)(2x-5)+1$.

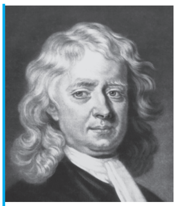
14. При каких действительных значениях параметра a уравнение $ax+5=0$ имеет множество решений:
а) $S=\{5\}$; б) $S=\{-10\}$; в) $S=\varnothing$; г) $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$?

15. При каких действительных значениях параметра m уравнение имеет одно решение? Найдите это решение, если: а) $mx=4$; б) $(m+1)x+2=0$; в) $(m-3)x=0$.

16*. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:
а) $|x|-2=0$; б) $|y|+\sqrt{13}=0$; в) $|x-2|=3$; г) $|2x+1|=0$;
д) $|x-0{,}2|=3$; е) $|4-x|=12{,}3$; ж) $|2x+\sqrt{7}|=-5$; з) $\left|\frac{1}{2}x+3\right|=25$.

Указание. Рассмотрите два случая: I случай, когда выражение под знаком модуля отрицательно, и II случай, когда это выражение неотрицательно.

§3. Решение задач на составление уравнений



Исаак Ньютон (1643–1727)

В своем учебнике по алгебре Исаак Ньютон, известный английский математик и физик, писал: „Чтобы решить вопрос, относящийся к числам или некоторым отношениям величин, нужно лишь перевести задачу с родного языка на алгебраический язык“.

Давайте последуем совету великого ученого.

1 На солнышке грелось несколько котят. Количество лап у этих котят на 10 больше количества ушей. Сколько котят грелось на солнышке?

На математическом языке

На солнышке грелось несколько котят.	x
Количество лап у этих котят	4x
Количество ушей у этих котят	2x
Количество лап на 10 больше количества ушей	$2x+10=4x$

Решим полученное уравнение:

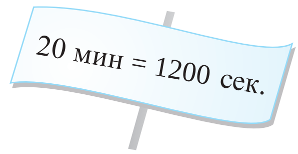
$2x+10=4x \;\Leftrightarrow\; \square\, x=\square \;\Leftrightarrow\; x=\square$

Ответ: □ котят.

> Результатом „перевода“ задачи на математический язык является математическая модель задачи.

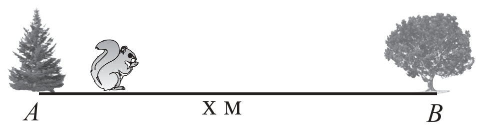
„Перевести“ условие задачи на математический язык можно по-разному, поэтому и решения могут быть различными.

2 Белка за 20 минут приносит орех в дупло. Как далеко от дупла расположен орешник, если известно, что налегке белка бежит со скоростью 5 м/с, а с орехом 3 м/с?



Решение:

I способ



Расстояние от дупла до орешника: x метров.

Время на путь от дупла до орешника: $\frac{x}{5}$ секунд.

Время на обратный путь: $\frac{x}{\square}$ секунд.

$\frac{x}{5}+\frac{x}{\square}=1200 \Leftrightarrow \square\, x+\square\, x=1200\cdot 15 \Leftrightarrow \square\, x=\square \Leftrightarrow x=\square$ (метров).

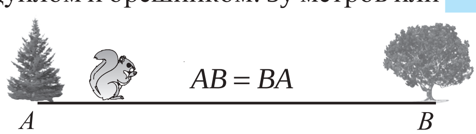
Ответ: □ метров.

II способ

На путь к орешнику белка тратит y секунд,

на обратный путь (1200 – y) секунд.

Расстояние между дуплом и орешником: 5y метров или □ · (1200 – y) метров.



$5y=\square\cdot(1200-y) \Leftrightarrow 5y+\square\, y=1200\cdot 3 \Leftrightarrow \square\, y=3600 \Leftrightarrow y=\square$ (секунд).

$AB=5\cdot\square=\square$ (метров).

Ответ: □ метров.

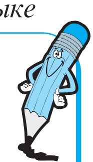
Упражнения и задачи

1. „Переведите“ на математический язык и найдите число x:
   а) Если число x увеличить в 4 раза и полученное произведение уменьшить на 2, то получим 22.
   б) Если число x увеличить в 3 раза, то разность полученного произведения и числа x будет равна 92.

2. В одном пакете x конфет, а во втором – в 3 раза больше. Что означает запись:
   а) $x+3x=800$;   б) $3x-x=400$;   в) $3x-200=x+200$?

3. В первой корзине в 2 раза больше винограда, чем во второй. Если из первой корзины переложить во вторую 3 кг винограда, то винограда в корзинах станет поровну. Сколько килограммов винограда в каждой корзине?
   Заполните таблицу и решите задачу.

На математическом языке

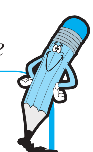


Во второй корзине (кг)	x
В первой корзине (кг)	$\square$ x
Если из первой переложить 3 кг	$\square - \square$
Переложить во вторую корзину 3 кг	$\square + \square$
Винограда станет поровну.	$\square = \square$

4. В двух седьмых классах 64 ученика. Если из 7а перевести двух учеников в 7б класс, то в каждом классе будет одинаковое количество ребят. Сколько учеников в 7б классе?

5. В школу Аня едет на автобусе, а потом идет пешком. Вся дорога у неё занимает 25 минут. Время пешего пути на 5 минут превышает езду на автобусе. Сколько минут Аня едет на автобусе?
   Заполните таблицу и решите задачу.

На математическом языке



Аня едет на автобусе (мин).	x
Аня идет пешком на 5 минут дольше, чем едет на автобусе.	x + $\square$
Вся дорога у нее занимает 25 мин.	$\square = \square$

6. Петя решил две задачи за 35 минут. Первую задачу он решал на 7 минут дольше, чем вторую. Сколько минут решал Петя вторую задачу?

7. Сумма трех последовательных натуральных чисел равна 33. Найдите эти числа.

8. К некоторому числу приписали справа нуль. Число увеличилось на 405. Найдите исходное число.

9. Для трех аквариумов требуется 61 литр воды. Первый аквариум вмещает в 1,5 раза больше воды, чем третий, а второй – на 5 литров больше, чем третий. Сколько литров воды вмещает каждый аквариум?

10. Три яйца африканского страуса и 60 куриных яиц весят 9 кг. Найдите вес яйца страуса, если известно, что оно тяжелее куриного в 20 раз.

11. Автобус едет со скоростью 50 км/ч и тратит на дорогу от Кишинева до Единец на 1,5 часа больше, чем автомобиль, едущий со скоростью 80 км/ч. В котором часу прибудет автобус в Единцы, если он отправится из Кишинева в 9 часов утра?

12. Моторная лодка преодолевает расстояние между двумя пристанями за 6 ч по течению и за 10 часов против течения. Найдите скорость течения реки, если скорость лодки в стоячей воде 16 км/ч.

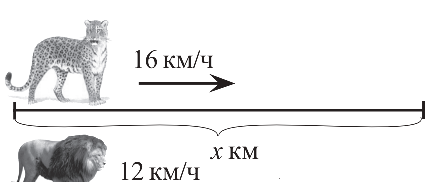
13. Маша и мама слепили 220 пельменей. Маша работала 2 часа, а мама – 3 часа. За час они вместе произвели 86 пельменей. Сколько пельменей сделала Маша, если у них одинаковая производительность?

14. От деревни до реки Вася ехал на велосипеде со скоростью 15 км/ч, а на обратном пути – со скоростью 10 км/ч. На весь путь он затратил 1 час. Найдите расстояние от деревни до реки.
Решите задачу двумя способами.

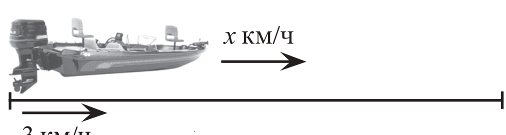
15. От автостанции до дачи Раду шел со скоростью 6 км/ч. На обратном пути он нес черешню, поэтому его скорость снизилась на 2 км/ч. На весь путь Раду затратил 1 час. На каком расстоянии от автостанции находится дача?
Решите задачу двумя способами.

16. По рисунку составьте задачу, для решения которой нужно решить уравнение:

а) $3x = 2(x+2)$.



б) $\frac{x}{16} + 1 = \frac{x}{12}$.



в) $5 \cdot (x+3) = 8 \cdot (x-3)$.

§ 4. Неравенства с одним неизвестным

4.1. Свойства числовых неравенств

1 Рассмотрите, прокомментируйте и дополните.

Верные числовые неравенства

$-7{,}2 \le -7{,}1$

$\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

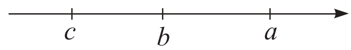
$1 < \sqrt{3} < 2$

$\square < 0$

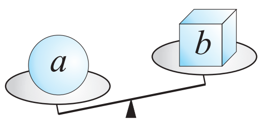
$\square \ge 8{,}1$

$\frac{1}{3} < \square < \frac{1}{2}$

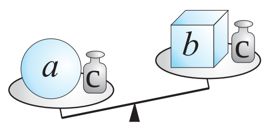
$a > b;\ a > c;\ b > c$



$c < b < a$



$a > b$



$a + c > b + c$

• Сравните:

$>$ $=$ $<$

12 ○ –6

12 + 7 ○ –6 + 7

12 – 9 ○ –6 – 9

① Если $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $a > b$, то $a + c > b + c$.

2 Сравните:

-3 ○ -7	30 ○ 15
$-3 \cdot 4$ ○ $-7 \cdot 4$	$30 : 3$ ○ $15 : 3$
$-3 \cdot (-2)$ ○ $-7 \cdot (-2)$	$30 : (-5)$ ○ $15 : (-5)$

② Если $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$ и $c \in \mathbb{R}^*_+$, то $ac > bc$.

③ Если $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$ и $c \in \mathbb{R}^*_-$, то $ac < bc$.

④ Если $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$ и $c \in \mathbb{R}^*_+$, то $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

⑤ Если $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$ и $c \in \mathbb{R}^*_-$, то $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

• Зная, что $x, y \in \mathbb{R}$ и $x > y$, сравните:

$>$ $=$ $<$

$2x$ ○ $2y$	$0 \cdot x$ ○ $0 \cdot y$
$\frac{1}{3}x$ ○ $\frac{1}{3}y$	$x + 1$ ○ $y + 1$
$-5x$ ○ $-5y$	$x - 7$ ○ $y - 7$

4.2. Неравенства

1 Одна сторона прямоугольника 5 см. Какой длины должна быть вторая сторона, чтобы периметр прямоугольника был больше 16 см?

$\boxed{(5 + x) \cdot 2 > 16}$

неизвестное — неравенство с одним неизвестным

$(5 + x) \cdot 2 > 16$ $\xrightarrow{④}$ $5 + x > 8$ $\xrightarrow{①}$ $x > \square$

Ответ: $\square$

• Является ли число -4 решением неравенства:

а) $3x+6<0$;

б) $\frac{1}{2}x \geq 8$;

в) $x^2+x \leq 13$;

г) $x+1>x+3$?

Образец:
$2x+1 \leq 0$
$2\cdot(-4)+1 \leq 0$
$-7 \leq 0$ – Верно
Ответ: Число -4 является решением неравенства.

Определение. **Решением неравенства** называется значение неизвестного, обращающее это неравенство в верное числовое неравенство.

2 Найдите два различных решения неравенства:

а) $2x+1<0$; б) $\frac{1}{2}x \geq 8$;

в) $x^2+x \leq 13$; г) $x+1<x+3$.

Решить неравенство – значит, найти множество его решений. Множество решений неравенства обозначают буквой S.

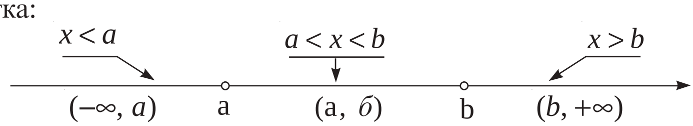
Определение. Два неравенства называют **равносильными**, если они имеют одинаковое множество решений.

Между равносильными неравенствами пишут знак „$\Leftrightarrow$". Итак, $2x+1<0 \Leftrightarrow 2x<-1$.

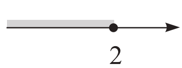
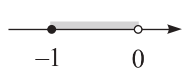
• У какого из указанных выше неравенств $S=\mathbb{R}$?

4.3. Числовые промежутки и операции над ними

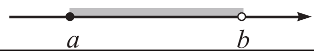
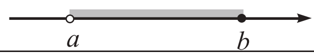
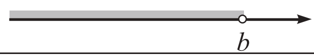
Множество решений неравенства с одним неизвестным записывают в виде числового промежутка:



1 Рассмотрите, прокомментируйте и заполните пропуски:

	Изображают	*Записывают*	*Читают*
$x>3$		$S=(3, +\infty)$	Числовой промежуток от 3 до плюс бесконечности, исключая 3.
$x \leq 2$		$S=(-\infty, 2]$	Числовой промежуток от минус бесконечности до 2, включая 2.
$-1 \leq x<0$		$S=[-1, 0)$;	Числовой промежуток от –1 до 0, включая –1 и исключая 0.
$2 \leq x \leq 5$		$S=[\quad,\quad]$	?

Пусть $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$.

Множество	Числовой промежуток	
	Изображение на числовой оси	Обозначение
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a \le x \le b\}$		$[a, b]$
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a \le x < b\}$		$[a, b)$
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a < x \le b\}$		$(a, b]$
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$		(a, b)
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x > a\}$		$(a, +\infty)$
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \ge a\}$		$[a, +\infty)$
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x < b\}$		$(-\infty, b)$
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \le b\}$		$(-\infty, b]$
$\mathbb{R}$		$(-\infty, +\infty)$

2 Выполните действие:

а) $[-3, 8] \cup [0, 12) = [-3, 12)$

$[-3, 8] \cap [0, 12) =$ ____;

б) $(-\infty, 2] \cup (3, 7) =$ ____

$(-\infty, 2] \cap (3, 7) =$ ____;

в) $(-10, 5] \cup [5, +\infty) =$ ____

$(-10, 5] \cap [5, +\infty) =$ ____.

Упражнения и задачи

1. Выпишите верные числовые неравенства:

а) $-2 > 0$; б) $3 < 7$; в) $-3 < -7$; г) $6 \ge 6$;

д) $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$; е) $\frac{5}{8} > \frac{9}{16}$; ж) $-\frac{3}{4} \le -\frac{2}{3}$; з) $3\sqrt{2} \le 2\sqrt{3}$.

2. Запишите в виде неравенства:

а) Семь больше одного.
б) Минус три меньше нуля.
в) Пять не больше, чем восемь целых пять десятых.
г) Минус шесть не меньше минус двенадцати.

3. Известно, что $a, b \in \mathbb{R}$ и $a > b$. Определите истинность высказывания:

а) $0{,}1a > 0{,}1b$; б) $\frac{a}{7} < \frac{b}{7}$; в) $a - 3 > b - 3$;
г) $-3a > -3b$; д) $-5 + a < -5 + b$.

4. Является ли число –2 решением неравенства:

а) $-3x - 7 < 0$; б) $2x > 1$; в) $-5 < x \le 0$;
г) $\frac{1}{2}x \ge -1$; д) $3x + 6 > 0$; е) $10 - x > 10$?

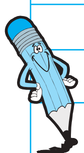
5. Назовите одно решение неравенства:

а) $x > 18$; б) $x < -27$; в) $9 < x \le 10$;
г) $1 < x < 2$; д) $-1{,}5 < x < -1$; е) $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$.

6. Прочитайте:

а) $[-2; 3)$; б) $(-1; 5]$; в) $(2; 7)$; г) $[0; 11]$;
д) $(0; +\infty)$; е) $(-\infty; -100]$; ж) $[-17; +\infty)$; з) $(-\infty; 3{,}2)$.

7. Заполните таблицу по образцу первой строки:



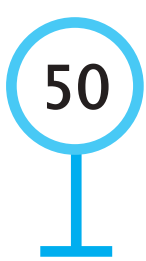
$x < 2$	2	$(-\infty; 2)$	Числовой промежуток от $-\infty$ до 2, исключая 2.
		$[5; +\infty)$	
	–3 1		
			Числовой промежуток от 3 до 4, включая 3, исключая 4.
$-1 \le x \le 15$			

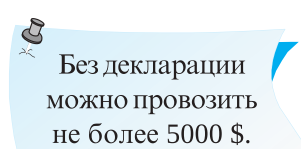
8. *Истинно* или *ложно*?

а) $5 \in (-1; 7)$; б) $3 \in (3; +\infty)$; в) $2 \in (-\infty; 2]$;
г) $10{,}2 \in (10{,}1; 10{,}19)$; д) $7 \in [-3; 7)$; е) $0 \in [0; 100)$.

9. „Переведите“ на математический язык и запишите в виде числового промежутка ограничения:

а) в детской игре; б) скорости на дороге; в) на таможне.





10. Изобразите на числовой оси числовой промежуток:

а) $(-2; 1]$; б) $[0; 5]$; в) $[1; 3)$; г) $(2; +\infty)$;
д) $(-\infty; -1]$; е) $(-\infty; 4)$; ж) $[7; +\infty)$; з) $(-4{,}5; +\infty)$.

11. Запишите числовой промежуток, изображенный на рисунке:

а) 

б) 

в) 

г) 

д) 

е) 

12. Выберите верные числовые неравенства:

а) $-\frac{11}{23} < -\frac{1}{2}$; б) $\frac{7}{8} > \frac{11}{12}$; в) $\frac{7}{29} \le \frac{1}{3}$; г) $\pi \le 3{,}14$;
д) $0{,}11 > -\frac{10}{11}$; е) $\sqrt{5} > 2\sqrt{2}$; ж) $-\sqrt{11} < -3{,}5$; з) $0 < -6{,}(3)$.

13. Сравните действительные числа a и b, если:

а) $a + 3 > b + 3$; б) $\frac{a}{6} < \frac{b}{6}$; в) $-\frac{1}{3}a > -\frac{1}{3}b$; г) $a - 5 > b - 5$.

14. Обе части неравенства $7 > 6$ умножили на a^4, $a \in \mathbb{R}$. Можно ли утверждать, что $7a^4 > 6a^4$? Обоснуйте ответ.

15. Найдите два решения неравенства:

а) $0 < x < \frac{1}{2}$; б) $2{,}5 < x \le 2{,}6$; в) $-0{,}25 \le x < 0$; г) $\frac{3}{4} < x \le 1$.

16. Найдите наибольшее и наименьшее целые числа, принадлежащие промежутку:

а) $(-10; -2)$; б) $[-1; 2]$; в) $(5; 9]$; г) $[3; 18)$;
д) $(1{,}1; 7{,}21)$; е) $(-3{,}1; 5{,}02]$; ж) $[-9{,}2; 0{,}8]$; з) $\left[-\frac{9}{2}; \frac{11}{3}\right)$.

17. Изобразите на числовой оси и запишите в виде числового промежутка множество решений неравенства:

а) $x \ge -6{,}2$; б) $x \le 15$; в) $\frac{1}{8} < x < \frac{2}{3}$;
г) $x > 8$; д) $x < -13{,}2$; е) $2 \le x \le 2{,}5$.

18. Выполните действия:

а) $[0, 5] \cup (-10, 7)$; б) $(-3; -1) \cup [-1; 78]$; в) $(-\infty, 3) \cup (-8; +\infty)$;
г) $(-7{,}3; 0{,}2) \cup (-1; 3{,}5]$; д) $(-\infty; +\infty) \cup [-7; \sqrt{3}]$; е) $(-\infty; -\sqrt{5}) \cup (-10; 1]$.

19. Выполните действия:

а) $(-3, 2) \cap (-2, 3)$; б) $(-\infty; 5) \cap (-1, 2)$; в) $(8{,}3; +\infty) \cap [-3, 7]$;
г) $(-\infty, +\infty) \cap (0, +\infty)$; д) $(-\sqrt{7}; -2{,}3] \cap [-2; 7)$; е) $(-3; 7] \cap [7; +\infty)$.

20. Выполните действия:

а) $\mathbb{R} \cap [0,\ 3] \cup (0,\ +\infty)$; б) $\mathbb{Z} \cap [-3,\ 4)$;

в) $\mathbb{N} \cap [-1;\ 5{,}5)$; г) $[-3,\ 0] \cap [-7,\ 1] \cup \mathbb{R}$.

21. Найдите три решения неравенства:

а) $\frac{1}{3} < x \le \frac{1}{2}$; б) $\frac{2}{3} \le x < \frac{3}{4}$; в) $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$.

22. Объясните, почему любое отрицательное число является решением нервенства:

а) $x^2 > x$; б) $0 \cdot x > -1$; в) $x^2 - 2x \ge 0$.

23. Найдите все целые числа, принадлежащие числовому промежутку:

а) $(\sqrt{2},\ \sqrt{17})$; б) $[-\sqrt{11},\ -\sqrt{3})$; в) $[\pi,\ \sqrt{27}]$; г) $(-\pi,\ -\sqrt{2}]$.

24. Дополните числовым промежутком, чтобы получить равенство:

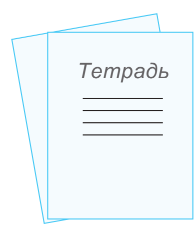
а) $\square \cup [-1,\ 1) = [-1,\ 3]$; б) $(2,\ 5) \cup \square = [-5,\ 5)$;

в) $\square \cap [0,\ 2] = (0,\ 1)$; г) $(-7,\ 9] \cap \square = \{9\}$.

§5. Неравенства I степени с одним неизвестным

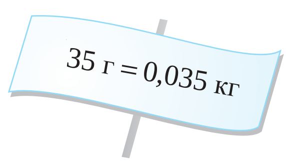
5.1. Понятие неравенства I степени с одним неизвестным

1 Ученическая тетрадь в 12 листов весит 35 г. Какое наибольшее количество тетрадей может взять домой учительница математики для проверки, если вес ее сумки с книгами составляет 3,5 кг и ей нельзя поднимать более 5 кг?



Объясняем

Пусть x – количество тетрадей.



Тогда: $\boxed{0{,}035x + 3{,}5 \le 5}$

неравенство I степени с одним неизвестным

$$0{,}035x + 3{,}5 \le 5 \Leftrightarrow 0{,}035x \le \square + 5 \Leftrightarrow x \le \square$$

Ответ: $\square$ тетрадей.

Определение. Неравенства вида $ax + b > 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \ge 0$, $ax + b \le 0$, где $a,\ b \in \mathbb{R}$ и $a \ne 0$, называются **неравенствами I степени**.

2 Рассмотрите схемы:

$ax+b>0 \;\Rightarrow\; ax>-b$

- $a>0$: $x>-\dfrac{b}{a}$, $S=\left(-\dfrac{b}{a};+\infty\right)$
- $a<0$: $x<-\dfrac{b}{a}$, $S=\left(-\infty;-\dfrac{b}{a}\right)$

$ax+b<0 \;\Rightarrow\; ax<-b$

- $a>0$: $x<-\dfrac{b}{a}$, $S=\left(-\infty;-\dfrac{b}{a}\right)$
- $a<0$: $x>-\dfrac{b}{a}$, $S=\left(-\dfrac{b}{a};+\infty\right)$

- Составьте подобные схемы решения неравенств $ax+b\geq 0$ и $ax+b\leq 0$, $a, b\in \mathbb{R}$, $a\neq 0$. Используя их, дополните:

а) $2x-7\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x\geq 7 \Leftrightarrow x \quad 3{,}5$

3,5

S =

б) $5-3x\leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3x \quad -5 \Leftrightarrow x \quad 1\frac{2}{3}$

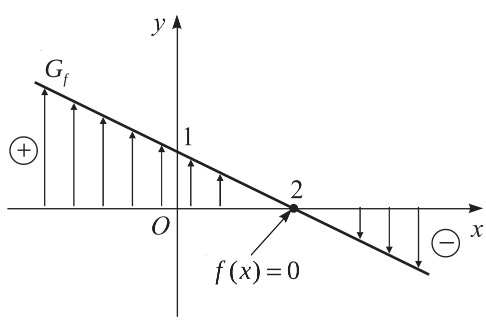
$1\frac{2}{3}$

S =

3 Дана функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-\dfrac{1}{2}x+1$.

Найдите значения x, при которых:

а) $f(x)=0$; б) $f(x)>0$; в) $f(x)<0$.



Объясняем

а) $f(x)=0$ при $-\dfrac{1}{2}x+1=0$.

Значит, $-\dfrac{1}{2}x+1=0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}x=-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x =$

б) $f(x)>0$ при $-\dfrac{1}{2}x+1>0$.

$-\dfrac{1}{2}x>-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x <$

$x\in$

в) $f(x)<0$ при $-\dfrac{1}{2}x+1<0$.

$-\dfrac{1}{2}x<-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x >$

$x\in$

• Решите неравенства по образцу:

а) $0 \cdot x \geq 3$;

б) $0 \cdot x < 0$;

в) $0 \cdot x > -1$.

Образец:

$0 \cdot x > 2$

$0 > 2$ – Ложно

$S = \varnothing$

5.2. Неравенства, приводимые к неравенствам I степени

Чтобы решить уравнение, его заменяют более простым, равносильным ему уравнением, используя свойства отношения равенств.

Применяем

$$\frac{7-2x}{3} = 5 \Leftrightarrow$$

$$7 - 2x = 5 \cdot 3 \Leftrightarrow$$

$$-2x = \square \Leftrightarrow$$

$$x = \square.$$

Ответ: S = { $\square$ }.

Чтобы решить неравенство, его заменяют более простым, равносильным ему неравенством, используя свойства числовых неравенств.

Применяем

$$\frac{7-2x}{3} > 5 \Leftrightarrow$$

$$7 - 2x > 5 \cdot 3 \Leftrightarrow$$

$$-2x > \square \Leftrightarrow$$

$$x < \square.$$

Ответ: $S = (-\infty; \square)$.

Преобразования неравенства, приводящие к эквивалентным ему неравенствам:

- Можно переносить слагаемые из одной части неравенства в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный.

$$3x - 5 > 2x + 1 \Leftrightarrow 3x - 2x > 5 + 1.$$

- Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же положительное число, при этом знак неравенства не меняется.

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} > 2 \Leftrightarrow 2x - 1 > 2 \cdot 3.$$

- Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, поменяв знак неравенства на противоположнный.

$$-3x > 6 \Leftrightarrow x < -2.$$

- Можно поменять местами части неравенства, изменив знак неравенства на противоположный.

$$-3\sqrt{2} > x \Leftrightarrow x < -3\sqrt{2}.$$

Упражнения и задачи

1. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:
а) $2x > 12$; б) $-3x \geq 15$; в) $8x < 24$; г) $-\frac{1}{2}x \leq -1$;
д) $5x < -2{,}5$; е) $0 \cdot x < -2$; ж) $2x - 71 \leq 1$; з) $-15 - 11x > 18$.

2. Укажите два целых решения неравенства:
а) $\frac{x-1}{3} < 1$; б) $3x - 1 \leq 2 + 7x$; в) $3 - 2x > 2x - 13$;
г) $\frac{x}{2} < 1 + \frac{x}{3}$; д) $x + 1 \geq \frac{x}{2}$; е) $\frac{2x-1}{6} < \frac{x+3}{12}$.

3. Найдите, при каких значениях x, $x \in \mathbb{R}$, выражение $5 + 8x$ принимает:
а) отрицательные значения; б) значения больше 15;
в) неотрицательные значения; г) значения не больше 21.

4. Найдите наибольшее целое решение неравенства:
а) $2x + 5 \leq 3$; б) $6x - 2 < 4$; в) $5{,}4 - x > 1{,}2$; г) $8 - 3x \geq 18$.

5. Найдите наименьшее целое решение неравенства:
а) $5x + 2 \geq 17$; б) $3x - 19 > 2$; в) $-2x - 3 < 4$; г) $10 - \frac{1}{3}x < 0{,}1$.

6. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство и укажите, какие из элементов множества $M = \left\{-21; -\frac{1}{5}; 0; \sqrt{2}; 101\right\}$ принадлежат множеству его решений:
а) $2x + 3 \geq 5 - x$; б) $\frac{1}{2}(x+5) \leq x - 3$;
в) $5 - 3x > 6 + 2x$; г) $7(3x - 5) < 28 - 21x$.

7. При каких действительных значениях x значение выражения $5 - x$ не больше значения выражения $\frac{1-3x}{2}$?

8. При каких действительных значениях y значение выражения $7 - 2y$ не меньше значения выражения $\frac{1+3y}{2}$?

9. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:
а) $4x - 7(x-2) < 10 - (3x - 5)$; б) $10 + 3(x-1) > 2x - 5(3x+1)$;
в) $5 - 4(2x+3) \geq 1 - 2(3x - 7)$; г) $12x - (x+4) \leq -3 - (x-2)$.

10. а) Найдите множество S решений неравенства: $-5(2x+8) > x - 4(x+6)$.
б) Определите истинность высказывания: $[-5; -3] \subset S$.

11. а) Найдите множество S решений неравенства: $3(6-9x)<15x-2(x+1)$.

б) Определите истинность высказывания: $[-1;\ 2]\subset S$.

12. Определите, при каких значениях x выполняются соотношения $f(x)=0$, $f(x)>0$, $f(x)<0$, $f(x)\geq 0$, $f(x)\leq 0$, если $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=3x+51$;   б) $f(x)=-\dfrac{1}{4}x+15$;   в) $f(x)=2-8x$.

13. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $(\sqrt{3}-2)x<2\sqrt{3}-4$;   б) $(\sqrt{5}-2)x+3\sqrt{5}\geq 6$.

14. При каких x, $x\in\mathbb{R}$, значение выражения:

а) $\dfrac{14-2x}{x^2+1}$ положительно;   б) $\dfrac{3x+18}{|x|+1}$ не положительно.

15. Найдите все отрицательные решения неравенства $-2x-\dfrac{x-3}{2}\leq 14$.

16. Найдите все положительные решения неравенства $3x-\dfrac{2-x}{3}\leq 6$.

17. При каких значениях a, $a\in\mathbb{R}$, множеством решений неравенства:

а) $2x-a\geq 3$ является $S=[5,+\infty)$;

б) $ax+2\leq 7$ является $S=(-\infty,1]$;

в) $ax-10>2$ является $S=(-\infty,-3)$?

18. Составьте неравенство, которое имеет множество решений:

а) $S=(2;+\infty)$;   б) $S=(-\infty;-3)$;   в) $S=[-1;+\infty)$;

г) $S=(-\infty;0]$;   д) $S=\mathbb{R}$;   е) $S=\varnothing$.

19. Найдите множество общих решений неравенств:

а) $2x+5>7$ и $7x-2\leq 26$;

б) $7x+3\geq 2x+10$ и $2-3x<4x-12$.

20. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $|x|\geq 3$;

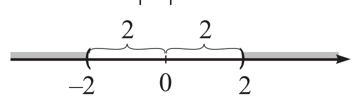
б) $|x|\leq 5$;

в) $|2x|<7$;

г) $4|x|>24$.

Образец:

$|x|>2$



$x>2$ или $x<-2$

Ответ: $S=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

Упражнения и задачи на повторение

1. При каких значениях x, $x \in \mathbb{R}$, значение выражения $8x+2$ в три раза больше значения выражения $5x-18$?
2. При каких значениях y, $y \in \mathbb{R}$, значение выражения $3y-1$ в два раза меньше значения выражения $10y-18$?
3. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:
   а) $12x-3=9$; б) $7x+11=4$; в) $3x+7=x-2$; г) $8x-(3x+1)=9$.
4. Периметр прямоугольника равен 32 см. Его ширина на 6 см короче длины. Найдите стороны прямоугольника.
5. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство и изобразите множество решений на числовой оси:
   а) $-2\cdot(x+5)<12$; б) $-\frac{1}{2}(x+2)\geq -3$; в) $5\cdot(3-2x)\leq 15$; г) $4\cdot(8-3x)>12$.

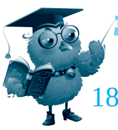
6. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:
   а) $5(x-3)-2(x-7)=7-7(2x+6)$; б) $5(8x-1)-7(4x+1)=9-8(7-4x)$;
   в) $\frac{4x-51}{3}-\frac{17-3x}{4}=\frac{x+5}{2}$; г) $\frac{2x+1}{3}-\frac{x-2}{5}=\frac{7x+5}{15}$.
7. Цену на куртку снизили на 20 %, теперь она стоит 320 леев. Какова была начальная цена куртки?
8. *Истинно* или *ложно*?
   а) $3x-2\leq 0 \Leftrightarrow 2-3x\geq 0$; б) $x^2+1>0 \Leftrightarrow (x+1)^2<0$.
9. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство и укажите два иррациональных его решения:
   а) $\frac{2x-3}{7}<1-\frac{3-x}{2}$; б) $(3x-5)^2>x\cdot(9x-1)+54$.
10. Найдите все целые положительные решения неравенства $4-\frac{x-1}{2}\geq x-\frac{2x-1}{3}$.
11. Выполните действия; изобразите числовые промежутки на числовой оси:
    а) $(-\infty, 3)\cup[0{,}5; 7)$; б) $[-5; \sqrt{3})\cup(-2{,}(3); 10)$;
    в) $[-5, 8)\cap(0, 3)$; г) $(-6, +\infty)\cap(-2; -0{,}3)$;
    д) $[-8; 3)\cap(0, 1)\cup(8, +\infty)$; е) $(3; +\infty)\cup(-2{,}6; 5)\cap(0; 25)$.
12. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:
    а) $x(x+2)-(x-3)(x+3)=13$; б) $4x(x-1)-(2x+5)(2x-5)=1$;
    в) $(x-3)(x+4)-2(3x-2)=(x-4)^2$; г) $(x+5)(x+2)-3(4x-3)=(x-5)^2$.

13. Число 2 является решением уравнения $kx+5=x-1$.
    Найдите решение уравнения $k(x-1)=3x+7$.
14. При каких значениях параметра m, $m\in\mathbb{R}$, уравнение не имеет решений:
    а) $(m-4)x=12$; б) $2x=5-mx$?

15. При каких значениях a, $a \in \mathbb{R}$, уравнение $|x| = a$:
а) не имеет решений; б) имеет два решения; в) имеет одно решение?

16. Из мешка отсыпали половину орехов, потом ещё половину остатка, затем половину нового остатка и наконец половину от последнего остатка. После этого в мешке осталось 10 орехов. Сколько орехов было в мешке первоначально?

17. Найдите множество общих решений неравенств $|x| \leq 3$ и $\frac{3-5x}{1-x} < 5$.



Задачи для чемпионов

18. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:
а) $4^{23}x - 32^{9}x = 16^{4} \cdot (4^{4})^{4}$; б) $\frac{x-1}{2} + \frac{x-2}{3} + \frac{x-3}{4} + \ldots + \frac{x-2011}{2012} + 2011 = 0$.

Проверочная работа

Время выполнения работы: 45 минут

1 вариант

1. Дополните: (1б)
$5x - 7 = 2x + 1 \Leftrightarrow$ ☐ x = ☐

2. Даны функции $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, (2б)
$f(x) = \frac{x-7}{2}$, $g(x) = 3x - 1$.
а) Найдите нули функций f и g.
б) При каких действительных значениях x, $f(x) \geq g(x)$?

3. Выполните действие при помощи числовой оси: $(-\infty, \sqrt{3}) \cap (-3, +\infty)$. (2б)

4. Найдите наименьшее целое решение неравенства $3(x-1) > 6 - 2(x+1)$. (2б)

5. Для продажи некоторого количества бананов за определенное время планировали ежедневно продавать по 40 кг. Каждый день продавали на 20 кг больше. Таким образом, весь товар был реализован на 3 дня ранее намеченного срока. За сколько дней планировали реализовать товар первоначально? (3б)

2 вариант

1. Дополните:
$3 - 2x = x + 6 \Leftrightarrow$ ☐ x = ☐

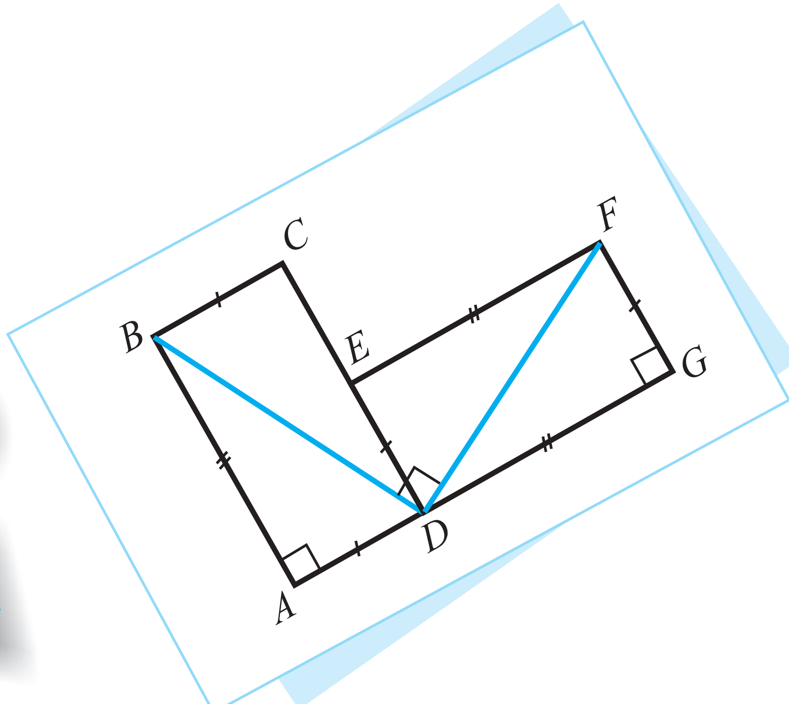
2. Даны функции $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f(x) = \frac{5-x}{2}$, $g(x) = 5x + 1$.
а) Найдите нули функций f и g.
б) При каких действительных значениях x, $f(x) \geq g(x)$?

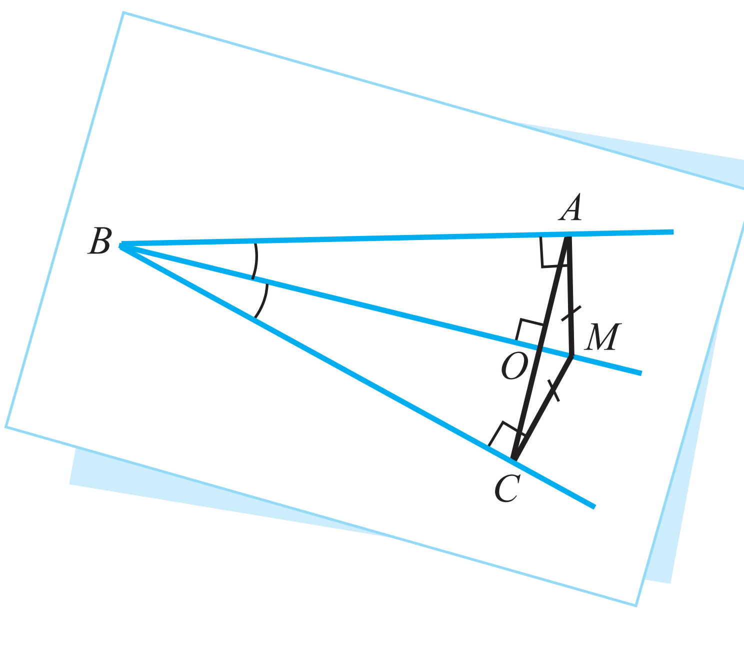
3. Выполните действие при помощи числовой оси: $(-4, 0) \cap [-2, 10)$.

4. Найдите наибольшее целое решение неравенства $2(x+1) < 4 - 3(x-2)$.

5. Степан прикинул: чтобы успеть прочесть книгу за время каникул, он должен ежедневно читать по 50 страниц. Каждый день он читал на 20 страниц больше. Таким образом, Степан прочел всю книгу на 4 дня раньше, чем закончились каникулы. Какова продолжительность каникул?

ГЕОМЕТРИЯ

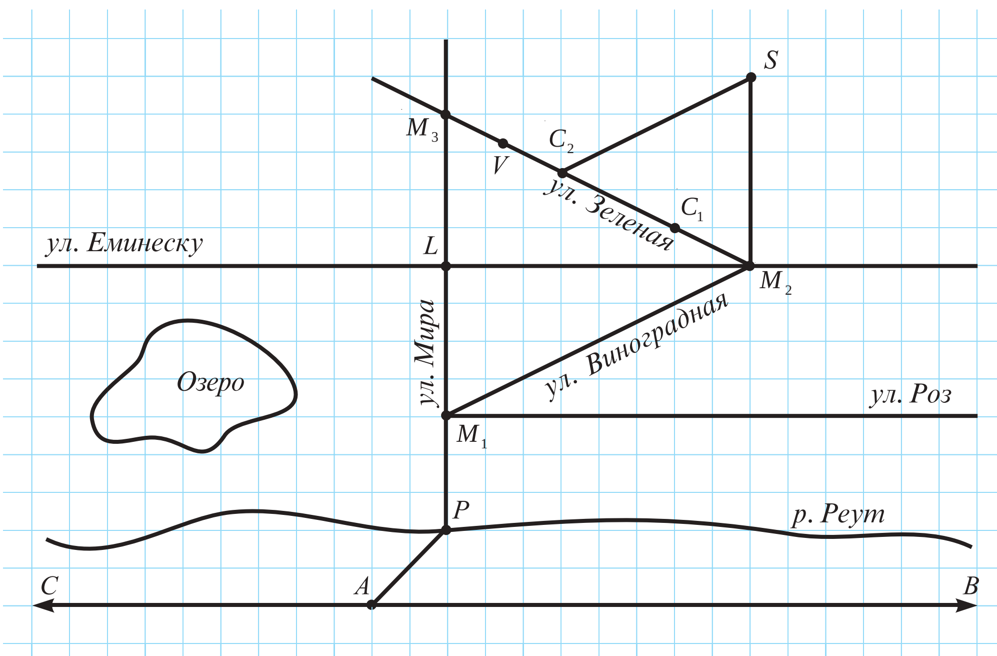




ГЛАВА 1 Основные геометрические понятия

§1. Точка, прямая, плоскость. Повторение и дополнения

1 В летнем лагере Влад подружился с Раду. В одном из писем он пригласил нового друга в гости. К письму он приложил карту своего села, на которой обозначил: A – автовокзал, B – Бельцкое направление, C – Кишиневское направление, P – мост, M_1, M_2, M_3 – магазины, L – библиотека, S – школа, C_1, C_2 – дома, а V – его дом.



Рассмотрите карту.

а) Что обозначил Влад точками?

б) Что изобразил прямыми, полупрямыми, кривыми линиями?

в) Обозначьте в тетради точки; прямые; полупрямые; отрезки.

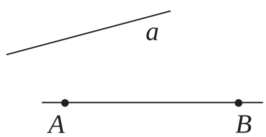
• Составьте и начертите аналогичную карту вашего местопроживания.

✓ **Точка** – самая простая геометрическая фигура. Все геометрические фигуры состоят из точек. **Геометрическая фигура** – это множество точек. Две геометрические фигуры **равны**, если они образованы из одних и тех же точек.

Изображаем:	*Обозначаем*:
• или ×	Точки обозначают прописными латинскими буквами: A, B, ... Иногда точки обозначают A_1, A_2, ... (читают: „A один“, „A два“, ...).

✓ Прямая

Понятие прямой, как и понятие точки, не может быть определено. Его можно только разъяснить. Прямая строится с помощью линейки. Фактически с помощью линейки мы изображаем только часть прямой. Прямые неограниченны, их можно продлить сколь угодно в оба конца.

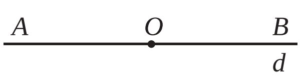
Изображаем:	*Обозначаем*:	*Читаем*:
	Прямые обозначают строчными латинскими буквами: a, b, ... или двумя прописными буквами: AB, CD, ...	Прямая a, прямая AB (или BA).

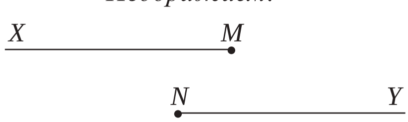
Определение. Точки, лежащие на одной прямой, называются **коллинеарными**.

Если три или более точек не являются коллинеарными, то их называют *неколлинеарными* точками.

✓ Полупрямая

Произвольная точка O, лежащая на прямой, делит эту прямую на две фигуры, называемые **полупрямыми**. Точка O называется **началом полупрямой**.

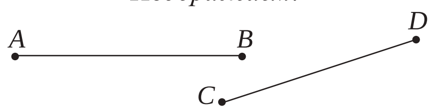


Изображаем:	*Обозначаем*:
	Полупрямые обозначают прописными латинскими буквами: $[MX$, $[NY$, ..., первая из которых обозначает начало полупрямой.

Определение. Две полупрямые с общим началом, образующие прямую, называются **противоположными полупрямыми**.

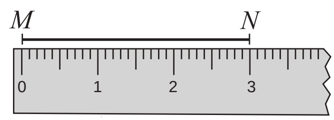
$[AB$ и $[AC$ являются противоположными полупрямыми.

✓ **Отрезок** – это часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих между двумя данными ее точками. Эти точки называются его **концами**.

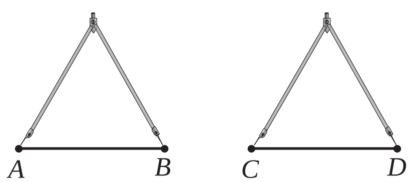
Изображаем:	*Обозначаем*:
	$[AB]$ или $[BA]$ $[CD]$ или $[DC]$

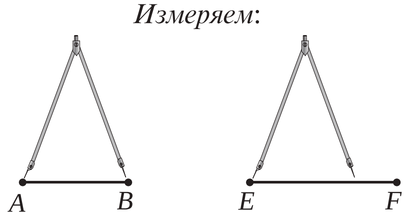
Длину отрезка можно определить с помощью линейки с делениями.

Для того чтобы **сравнить длину** двух отрезков, можно использовать линейку с делениями или циркуль.



$MN = 3$ см

Измеряем:	*Обозначаем*:	*Читаем*:
	$AB = CD$	Длина отрезка AB равна длине отрезка CD.

Измеряем:	*Обозначаем*:	*Читаем*:
	$AB < EF$ или $EF > AB$	Длина отрезка AB меньше длины отрезка EF, или длина отрезка EF больше длины отрезка AB.

Определение. Два отрезка одинаковой длины называются **конгруэнтными отрезками**.

Обозначаем: $[AB] \equiv [CD]$. *Читаем*: Отрезок AB конгруэнтен отрезку CD.

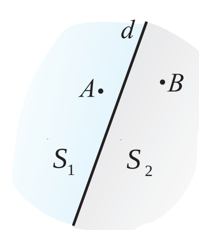
Очевидно, произвольный отрезок определяет прямую. Эта прямая называется **несущей прямой** соответствующего отрезка. Итак, если [AB] – отрезок, то прямая AB является несущей прямой этого отрезка.

2 Дополните:

Прямая d, лежащая в плоскости, разбивает эту плоскость на ______ множества точек S_1 и S_2.

Если отрезок AB пересекает прямую d и точка A принадлежит множеству S_1, то $B \in$ ______.

Если отрезок CD не пересекает прямую d и $D \in S_1$, то $C \in$ ______.



✓ Плоскость и полуплоскость

Понятие *плоскость*, как и понятия *точка*, *прямая*, не определяется.

Изображаем:	*Обозначаем*:
	Плоскости обозначают строчными греческими буквами: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ (читаем: „альфа”, „бета”, „гамма ”, „ дельта”, ...).

Определение. Две **геометрические фигуры** называются **компланарными**, если они лежат в одной плоскости.

Если две геометрические фигуры не лежат в одной плоскости, то они называются **некомпланарными**.

Учитывая, что геометрические фигуры – это множество точек, в случае, когда фигура F содержится в плоскости α, обозначаем $F \subset \alpha$. Если точка M принадлежит фигуре F, обозначаем $M \in F$.

Прямая d, лежащая в плоскости, разбивает эту плоскость на два множества точек, называемых **полуплоскостями**.

Прямая d называется **границей полуплоскостей**.

Изображаем:	*Обозначаем*:	*Читаем*:
	$[dA$	Полуплоскость, определенная прямой d и точкой A.

Упражнения и задачи

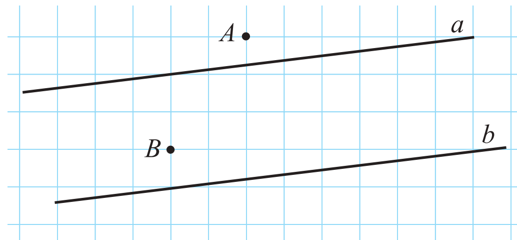
1. Выберите геометрические фигуры, понятие которых не определяется:
   прямая, квадрат, плоскость, треугольник, окружность, точка, полупрямая, отрезок.

2. Постройте геометрическую фигуру, образованную:
   а) тремя точками; б) пятью точками; в) двумя прямыми;
   г) тремя полупрямыми; д) самое меньшее 100 точками; е) четырьмя отрезками.

3. Точка N принадлежит отрезку MK. Найдите:
   а) MN, если $MK = 4{,}4$ см, $NK = 26$ мм;
   б) NK, если $MK = 6{,}3$ см, $MN = 17$ мм;
   в) MK, если $KN = 5{,}6$ см, $MN = 0{,}9$ дм;
   г) NM, если $KN = 3{,}8$ см, $MK = 0{,}12$ м.

4. Определите, являются ли точки A, B, C коллинеарными, зная, что:
а) $AB=17$ см, $AC=3$ дм, $BC=13$ см;
б) $AB=29$ см, $AC=420$ мм, $BC=1{,}3$ дм;
в) $AB=4$ дм, $AC=15$ мм, $BC=38{,}5$ см;
г) $AB=48$ мм, $AC=6$ см, $BC=12$ см.

5. Перечертите рисунок и отметьте две точки, коллинеарные точкам A и B:
а) лежащие на прямых a и b;
б) лежащие по разные стороны относительно прямой a;
в) лежащие в полуплоскости $[bA$;
г) лежащие в полуплоскости $[aA$.



6. Рассмотрите рисунок предыдущего упражнения. Применив операции над множествами, запишите, как можно обозначить часть плоскости, заключенной между прямыми a и b.

7. Точки M, N, K – коллинеарны.
Какая из точек, безусловно, не лежит между двумя другими, если:
а) $MN < NK$; б) $KM < KN$; в) $NK > KM$; г) $NM > NK$?

8. Постройте рисунок, соответствующий описанной ситуации.
а) Прямые a и b пересекаются, точка A принадлежит прямой a, точка B (отличная от A) принадлежит обеим прямым.
б) Прямые a, b, c не имеют общих точек и каждые две из них пересекаются.
в) Прямая a содержит полупрямую $[OA$ и точки O, A, B коллинеарны.
г) Точка C принадлежит пересечению полупрямых $[AB$ и $[BA$.

9. На сколько частей делят плоскость 3 полупрямые с общим началом?

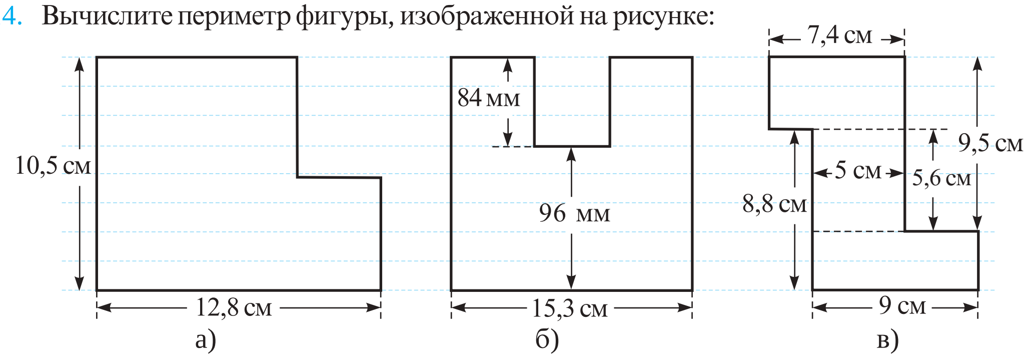
10. Прочтите: а) $M\in[AB]$; б) $d\subset\alpha$; в) $M\in\alpha$; г) $[AB]\subset\alpha$.

11. Обозначьте:
а) Точка O принадлежит полупрямой $[AB$.
б) Точка X не принадлежит отрезку MN.
в) Точки A, B, C – коллинеарны, а точки A и B принадлежат прямой a.
г) Плоскость α содержит отрезок AB.

12. *Истинно* или *ложно*?
а) $[AB]\subset AB$; б) $[AB\subset[AB]$;
в) $[AB\cap[BA=\varnothing$; г) $[AB]\cap[AB=[AB$;
д) $[AB]\cup[AB=[AB$; е) $AB\setminus[AB=[AB]$.

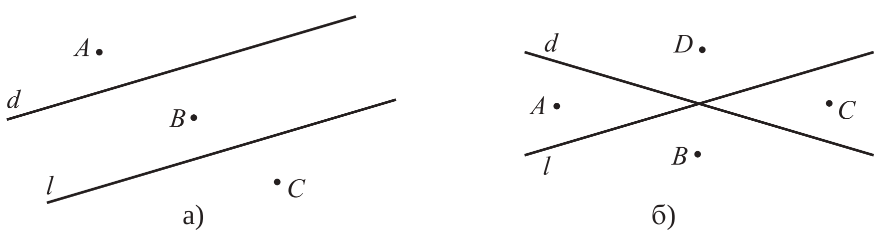
13. Сколько различных полупрямых определяют:
а) три коллинеарные точки; б) три неколлинеарные точки; в) четыре коллинеарные точки; г) четыре точки, если любые три из них неколлинеарные?

14. Вычислите периметр фигуры, изображенной на рисунке:

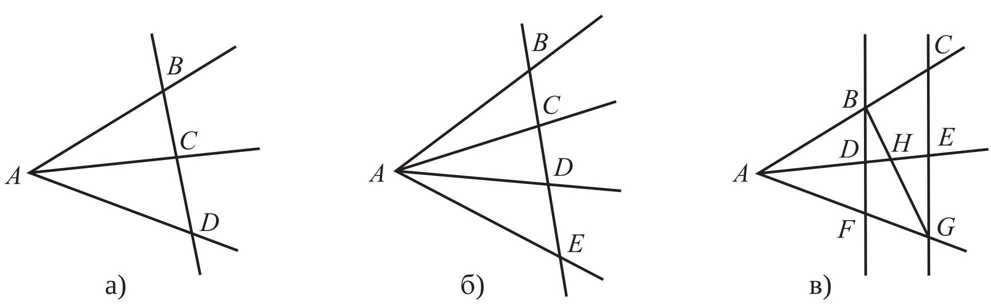


15. Сколькими способами можно обозначить изображенную прямую?

16. Обозначьте все полуплоскости.



17. Сколько отрезков изображено?



18. Отметьте:
а) 5 точек, из которых любые три – неколлинеарны;
б) 7 точек, из которых любые три – неколлинеарны;
в) 20 точек, из которых любые три – неколлинеарны.

§ 2. Взаимные расположения

✓ Две точки

Точки идентичны или совпадают

$A \bullet_B$

Обозначаем: $A = B$

Различные точки

$A \bullet \qquad \bullet B$

Обозначаем: $A \neq B$

Основное свойство
Если A и B – две различные точки, то существует единственная прямая, проходящая через точки A и B.

✓ Точка и прямая

Точка принадлежит прямой

Обозначаем: $A \in d$

Точка не принадлежит прямой

Обозначаем: $A \notin d$

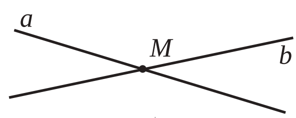
Основное свойство
Для любой прямой существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.

✓ Две компланарные прямые

Прямые совпадают

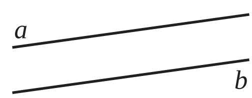
Обозначаем: $a = b$

Прямые пересекаются



Обозначаем: $a \cap b = \{M\}$

Прямые параллельны



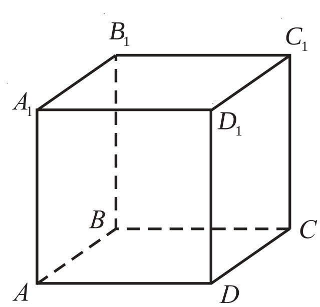
Обозначаем: $a \parallel b$

Определение. Две пересекающиеся прямые, образующие при пересечении прямой угол, называются **перпендикулярными прямыми**.

Обозначаем: $a \perp b$. *Читаем*: Прямые a и b перпендикулярны.

• Рассмотрите карту, составленную Владом (с. 124) и укажите:
а) пересекающиеся прямые;
б) параллельные прямые;
в) точки, принадлежащие прямой C_1C_2;
г) точки, не принадлежащие прямым M_2L и C_1C_2;
д) точку пересечения прямых C_1C_2 и M_2L.

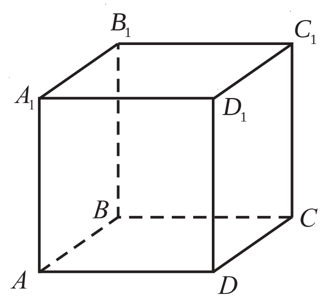
• Рассмотрите куб и укажите ребра, несущие прямые которых:
а) параллельны;
б) пересекаются;
в) не параллельны и не пересекаются.



Замечание. Принято говорить,что два ***отрезка параллельны***, если их несущие прямые параллельны.

Упражнения и задачи

1. Прочтите: а) $M \in d$; б) $M \notin AB$; в) $\{A, B, C\} \subset d$; г) $\{A, B, C\} \subset \alpha$.
2. Рассмотрите куб, изображенный на рисунке. Запишите:
   а) две прямые, параллельные прямой AD.
   б) семь прямых, содержащих точку A.
   в) четыре прямые, пересекающие прямую AD.



3. Запишите все пары прямых, проходящих через вершины изображенного куба, которые не параллельны и не пересекаются.
4. Сколько различных прямых можно провести через:
   а) три неколлинеарные точки;
   б) четыре точки, из которых любые три – неколлинеарны;
   в) пять точек, из которых любые три – неколлинеарны;
   г) десять точек, из которых любые три – неколлинеарны?
5. Выполните рисунок, соответствующий описанной ситуации:
   а) $a \parallel b,\ b \cap c = \{A\},\ B \neq a \cap c,\ B \in a$; б) $a \cap b = \{A\},\ b \cap c = \{B\},\ a \cap c = \{C\}$;
   в) $a \cap b \cap c = \{X\},\ \{X, Y, Z\} \subset a$; г) $[AB] \cap d = \{C\},\ AC = BC,\ D \in [dA$.
6. Можно ли определить взаимное расположение прямых a и b, если:
   а) прямые a и c параллельные, а прямые b и c некомпланарные;
   б) прямые a и c пересекаются, а прямые b и c некомпланарные;
   в) прямые a и c пересекаются, а прямые b и c параллельные;
   г) прямые a и c компланарные и прямые b и c компланарные?
   Ответ обоснуйте.

7. *Возможно* или *невозможно*?
   а) Три прямые имеют две точки пересечения.
   б) Три прямые имеют три точки пересечения.
   в) Три прямые имеют четыре точки пересечения.
   г) Три прямые имеют одну точку пересечения.
8. Постройте 4 прямые, которые пересекаются в:
   а) 3 точках; б) 4 точках; в) 5 точках; г) 6 точках.
9. На сколько различных частей разбивают плоскость:
   а) две параллельные прямые, пересеченные третьей прямой;
   б) три параллельные прямые, пересекающиеся с четвертой прямой;
   в) четыре прямые, пересекающиеся в одной точке?

10. Возможно ли, чтобы три прямые, каждые две из которых пересекаются, были некомпланарными? Обоснуйте ответ.

§ 3. Расстояния на плоскости. Конгруэнтность фигур

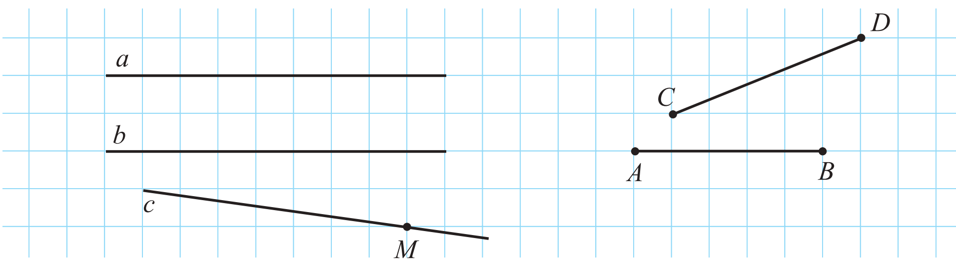
3.1. Расстояния

Расстояние между двумя геометрическими фигурами F_1 и F_2 – это длина наименьшего отрезка, концы которого принадлежат фигурам F_1 и F_2 соответственно.

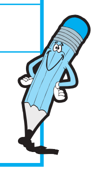
Очевидно, что расстояние между точками A и B равно длине отрезка AB.

Обозначаем: $d(A, B)$ или AB.

1 Рассмотрите рисунок и заполните таблицу. Сделайте вывод.



Фигура ①	A	a	a	$[AB]$	M	C	A
Фигура ②	B	b	c	$[CD]$	a	AB	b
Расстояние между фигурами ① и ② (см)	0						



2 Обратите внимание на свойства расстояний между двумя точками, прокомментируйте их и проиллюстрируйте примерами.

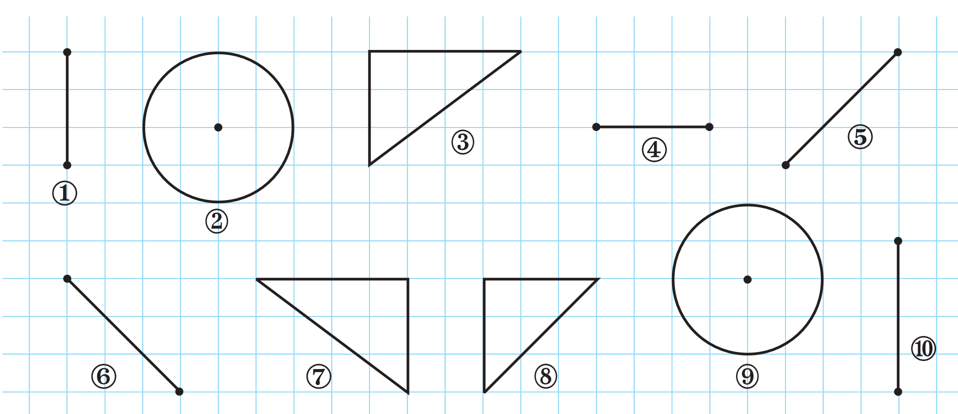
Свойства расстояний между двумя точками

1° $d(A, A) = 0$; 2° $d(A, B) = d(B, A)$; 3° $d(A, B) \le d(A, C) + d(C, B)$.

• Каково взаимное расположение точек A, B, C, если $d(A, B) < d(A, C) + d(C, B)$?

3.2. Конгруэнтность фигур

1 Рассмотрите рисунок и выберите пары фигур, которые при наложении совпадают.



Определение. Две геометрические фигуры F_1 и F_2, которые при наложении совпадают, называются **конгруэнтными фигурами**.

Обозначаем: $F_1 \equiv F_2$. *Читаем*: „Фигура F_1 конгруэнтна фигуре F_2“.

- Используя определение конгруэнтных фигур, подумайте и дополните:
  а) Два отрезка конгруэнтны, если ... равны.
  б) Две окружности конгруэнтны, если ... равны.
  в) Два угла конгруэнтны, если ... равны.
  г) Два прямоугольника конгруэнтны, если ... равны.

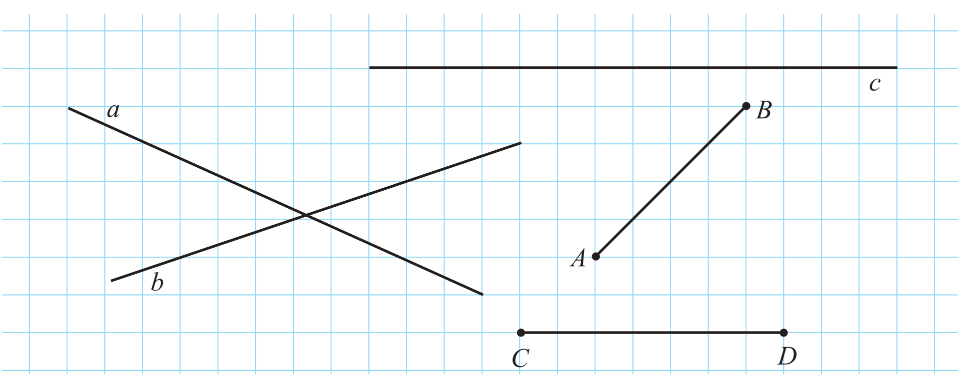
2 Пусть даны геометрические фигуры F_1, F_2, F_3. Что можно сказать о конгруэнтности фигур F_1 и F_2, если $F_1 \equiv F_3$ єі $F_2 \equiv F_3$?

Теорема

Если $F_1 \equiv F_3$ и $F_2 \equiv F_3$, то $F_1 \equiv F_2$.

Упражнения и задачи

1. Рассмотрите рисунок и заполните таблицу.



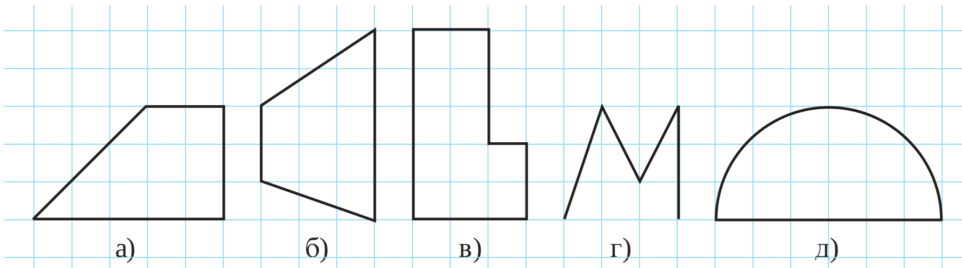
Фигура ①	a	a	b	a	$[CD]$	$[AB]$	$[AB]$
Фигура ②	b	$[CD]$	AB	c	c	$[CD]$	c
Расстояние между фигурами ① и ② (см)	0						

2. Дополните так, чтобы получить истинное высказывание.
   а) Расстояние между пересекающимися прямыми равно ______.
   б) Если расстояние между точкой A и прямой a равно 0, то ______.

в) Если расстояние между двумя компланарными прямыми отлично от 0, то прямые ________.

г) Если $AB + AC = BC$, то точки A, B, C являются ________.

3. Постройте фигуру, конгруэнтную фигуре, изображенной на рисунке:



4. *Истинно* или *ложно*?

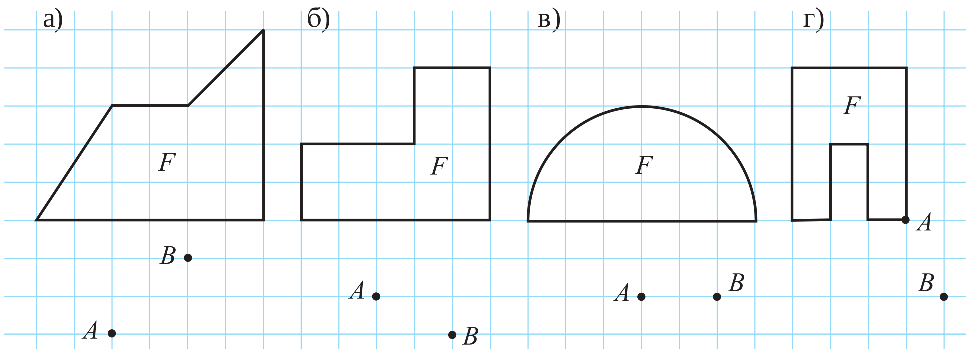
а) Любые две прямые конгруэнтны.
б) Любые две полупрямые конгруэнтны.
в) Любые два квадрата конгруэнтны.
г) Любые две стороны квадрата конгруэнтны.

5. Расстояние между двумя конгруэнтными отрезками равно 18 см. Найдите расстояние между серединами отрезков, если их концы коллинеарны, и длина одного из отрезков равна 10 см.

6. Расстояние между двумя конгруэнтными отрезками равно 24 см. Найдите длину отрезков, если известно, что она в 2 раза меньше расстояния от середины одного отрезка до другого отрезка, а концы отрезков коллинеарны.

7. Прямые a, b, c параллельны. Расстояние между прямыми a и c в два раза меньше, чем расстояние между прямыми b и c. Каким может быть расстояние между прямыми a и c, b и c, если расстояние между прямыми a и b равно 12 см?

8. Перечертите и постройте фигуру F_c, конгруэнтную изображенной на рисунке фигуре F, так, чтобы точки A и B принадлежали фигуре F_c.



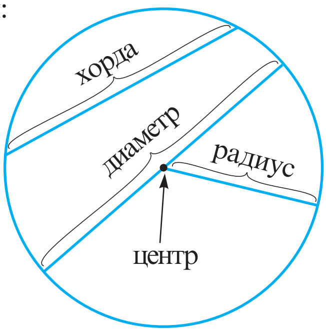
9. Точки M, N и L – коллинеарны. Вычислите расстояние между серединами отрезков MN и NL, если $MN = 10$ см и $[MN] \equiv [NL]$. Рассмотрите все возможные случаи.

10. Сторона квадрата конгруэнтна одной из сторон прямоугольника, а периметр квадрата в 2 раза меньше периметра прямоугольника. Во сколько раз длина стороны квадрата меньше длины стороны прямоугольника?

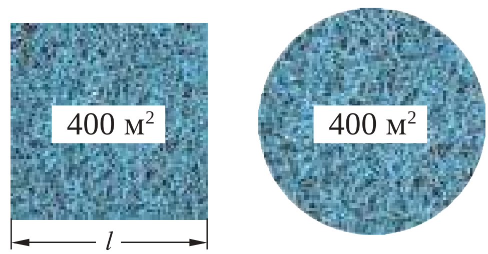
§4. Окружность. Круг. Повторение

1 Вспомните элементы окружности и дополните пропуски:

- Все точки окружности равноудалены от одной заданной точки, которая называется ______.
- Отрезок, соединяющий центр окружности с любой точкой окружности, называется ______.
- Отрезок, соединяющий любые две точки окружности, называется ______.
- Хорда, проходящая через центр окружности, называется ______.
- Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется ______.
- Окружность, объединенная со своей внутренней областью, называется ______.



2 Рассмотрите рисунок и определите, для участка какой формы потребуется больше сетки для ограждения.



$\mathscr{A}_{\square} = l^2$
$\mathscr{P}_{\square} = 4l$

$\mathscr{A}_{\bigcirc} = \pi R^2$
$L_{\bigcirc} = 2\pi R$

Решаем

① Вычислим периметр квадрата:

$$l = \sqrt{\mathscr{A}_{\square}} = \sqrt{400} = 20 \ (\text{м}).$$

$$\mathscr{P}_{\square} = 4 \cdot 20 = 80 \ (\text{м}).$$

② Вычислим длину окружности:

$$R^2 = \frac{A_{\bigcirc}}{\pi}; \quad R = \sqrt{\frac{A_{\bigcirc}}{\pi}} = \sqrt{\frac{400}{\pi}} = \frac{\sqrt{400}}{\sqrt{\pi}} = \frac{20}{\sqrt{\pi}} \ (\text{м}).$$

$$L_{\bigcirc} = 2\pi \cdot \frac{20}{\sqrt{\pi}} = \frac{40 \cdot \pi}{\sqrt{\pi}} = 40\sqrt{\pi} < 40 \cdot 2 = 80 \ (\text{м}).$$

$$\sqrt{\pi} < \sqrt{4} = 2$$

$L_{\bigcirc} < 80$ м.

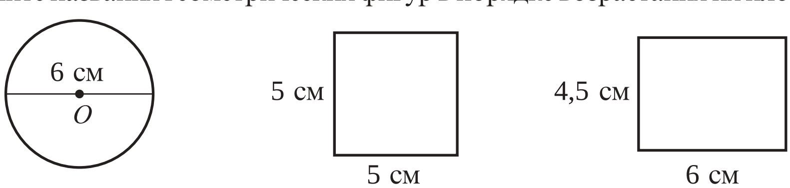
Ответ: Для квадратного участка потребуется больше сетки.

Упражнения и задачи

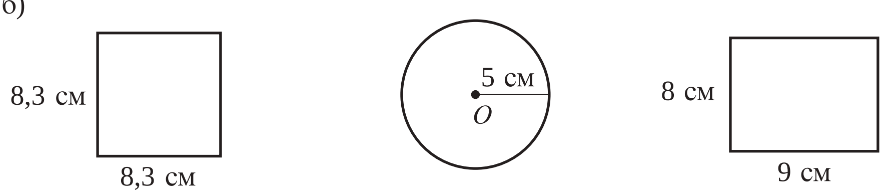
1. Пусть R – радиус окружности, а d – расстояние от точки M до центра этой окружности. Определите расположение точки M относительно окружности, если:
   а) $R = 10$ см, $d = 10$ см; б) $R = 8$ см, $d = 9$ см;
   в) $R = \sqrt{20}$ см, $d = 3\sqrt{3}$ см; г) $R = 13$ см, $d = 4\pi$ см.
2. Вычислите длину окружности, радиус которой равен:
   а) 5 м; б) $2\frac{1}{4}$ м; в) $\frac{3}{\pi}$ м; г) $\sqrt{7}$ м.
3. Вычислите длину окружности, диаметр которой равен:
   а) 8 м; б) 1,(4) м; в) $\frac{6}{\pi}$ м; г) $4\sqrt{5}$ м.
4. Вычислите площадь круга, радиус которого равен:
   а) 7 м; б) $2\sqrt{3}$ м; в) 3,(6) м; г) 1,25 м.
5. Вычислите площадь круга, диаметр которого равен:
   а) 8 м; б) 6,(6) м; в) $\frac{3}{\pi}$ м; г) $2\sqrt{11}$ м.
6. Найдите радиус окружности, длина которой равна:
   а) 6π м; б) 9π м; в) 1 м; г) 20 м.
7. Найдите диаметр круга, площадь которого равна:
   а) 100π м^2; б) 25π м^2; в) 100 м^2; г) 400 м^2.

8. Какой минимальной длины должна быть сторона квадрата, чтобы в нем можно было вписать окружность радиуса:
   а) 3 см; б) 4π см; в) $2\sqrt{3}$ см; г) $\frac{2}{7}$ см?
9. Дана точка O на плоскости. Изобразите множество:
   а) $A = \{M \mid OM = 3 \text{ см}\}$; б) $B = \{M \mid OM = 4{,}5 \text{ см}\}$;
   в) $C = \{M \mid OM \le 4 \text{ см}\}$; г) $D = \{M \mid OM \le 3{,}5 \text{ см}\}$.
10. Запишите названия геометрических фигур в порядке возрастания их площадей:

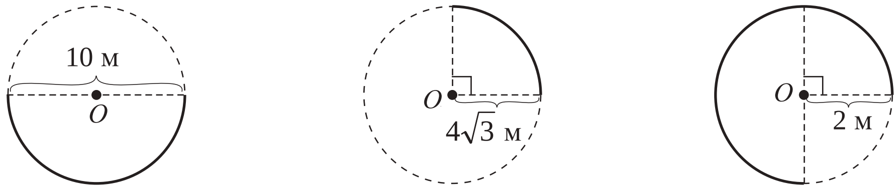
а)



б)

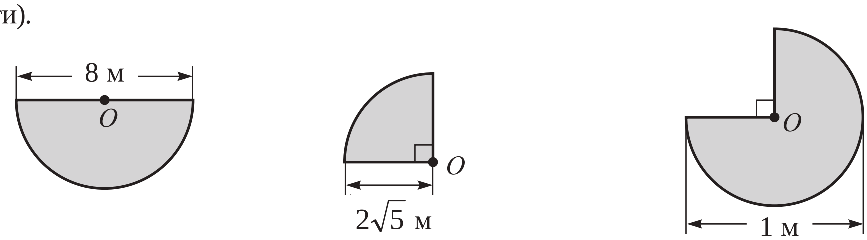


11. Рассмотрите рисунок и вычислите длину части окружности (точка O – центр окружности)



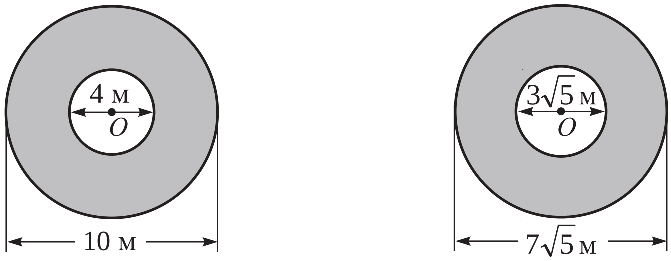
а) б) в)

12. Рассмотрите рисунок и вычислите площадь части круга (точка O – центр окружности).



а) б) в)

13. Вычислите площадь кольца, изображенного на рисунке (точка O – центр окружностей, ограничивающих кольцо).



а) б)

14. Дана точка O на плоскости. Изобразите множество:

а) $A = \{M \mid 2 \text{ см} \le OM \le 4 \text{ см}\}$; б) $B = \{M \mid 3 \text{ см} \le OM \le 5 \text{ см}\}$;

в) $C = \{M \mid OM \ge 2 \text{ см}\}$; г) $D = \{M \mid OM \ge 3{,}5 \text{ см}\}$.

15. а) Постройте треугольник, вершины которого лежат на окружности так, чтобы одна из сторон являлась диаметром этой окружности. Измерьте величины углов треугольника. Сделайте вывод.

б) Используя вывод пункта а), найдите длину наибольшей стороны треугольника, один из углов которого равен 90°, а вершины лежат на окружности радиуса 10 см.

16. Площадь круга, выполненного из картона, равна 400 см^2. Из середины этого круга вырезали еще один круг, в результате чего получилось кольцо площадью 175 см^2. Чему равна площадь вырезанного круга?

§ 5. Математические высказывания. Аксиомы. Теоремы

5.1. Утверждения и математические высказывания

1 О каких из следующих утверждений можно сказать, что они *истинны* или *ложны*?

а) „Число 8 делится на 2“.
б) „На планете Марс существует жизнь“.
в) „Привет!“.
г) „У четырехугольника 5 сторон“.

Объясняем

Утверждение а) является истинным высказыванием.

Утверждение б) является либо истинным, либо ложным (на данный момент ученые с уверенностью не могут сказать, есть ли жизнь на планете Марс).

Утверждение в) не является высказыванием (не имеет смысла говорить, что это утверждение истинно или ложно).

Утверждение г) является ложным высказыванием.

Высказывание (математическое) – это утверждение, о котором с уверенностью можно сказать истинно оно или ложно.

Если высказывание **истинно**, то говорят, что его **истинностное значение** – „**истина**“.

Если высказывание **ложно**, то говорят, что его **истинностное значение** – „**ложь**“.

• Выберите высказывания и установите их истинностное значение.
а) „ Две пересекающиеся прямые имеют одну общую точку“.
б) „Если целое число оканчивается цифрой 0, то оно делится на 5“.
в) „Муравей – это насекомое“.
г) „Ване 15 лет“.
д) „Миша увлекается футболом“.

2 Сравните истинностные значения высказываний:

а) „Число 7 **является** простым“ и „Число 7 **не является** простым“.

б) „Уравнение $x^2=-1$ **имеет** одно целое решение“ и „Уравнение $x^2=-1$ **не имеет** целого решения“.

Объясняем

а) Первое высказывание является *истинным*, а второе – *ложным*.
б) Первое высказывание является *ложным*, а второе – *истинным*.

Каждому высказыванию соответствует другое высказывание, которое называется **отрицанием исходного высказывания** и которое, как правило, получают из исходного высказывания приписыванием частицы *не* перед глаголом.
Высказывание и его отрицание имеют различные истинностные значения.

Таким образом, высказывание „Число 7 не является простым“ – это отрицание высказывания „Число 7 является простым“.

• Сформулируйте отрицание высказывания и установите истинностные значения обоих высказываний.

а) „У треугольника есть диагонали.“ б) „$2+2=4$.“

4.2. Аксиомы. Теоремы

Истинные математические высказывания, которые принимаются без доказательств, называются **аксиомами**. Математическое высказывание, истинность которого надо доказать, называется **теоремой**.

Доказательство теоремы – это последовательность логических рассуждений, основанных на аксиомах, теоремах и свойствах (уже доказанных).

Примеры:

1. Высказывания „ Для любой прямой существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей“ и „Любые две различные точки определяют одну и только одну прямую“ являются аксиомами.
2. Высказывание „Если две прямые имеют две различные общие точки, то они совпадают“ является теоремой. Ее истинность можно доказать.

Теорему можно сформулировать так: „Если U, то Z .“

Высказывание U называется **условием** теоремы, а высказывание Z – **заключением** теоремы.

Условие теоремы – это истинное высказывание. Заключение теоремы – это высказывание, истинность которого надо доказать.

Поменяв местами условие теоремы с ее заключением, получим новое высказывание, которое называется **обратным** исходной теореме. Высказывание, обратное исходной теорем, может быть истинным (т. е. новой теоремой) или ложным. Если высказывание, обратное исходной теореме, также является теоремой, то исходная теорема называется **прямой теоремой**, а обратная – обратной теоремой.

Например:

1. Теореме „Если целое число оканчивается цифрой 0, то оно делится на 10“ соответствует обратное высказывание – „Если целое число делится на 10, то оно оканчивается цифрой 0“, которое является истинным высказыванием (теоремой).
2. Теореме „Если целое число оканчивается цифрой 0, то оно делится на 5“ соответствует обратное высказывание – „Если целое число делится на 5, то оно оканчивается цифрой 0“, которое является ложным.

Существуют разные методы доказательств теорем.

Иногда вместо доказательства того, что высказывание Z истинно, легче доказать, что оно не может быть ложным. Этот метод доказательства называется *методом от противного* и основывается на том, что:

Высказывание „Если U, то Z “ является истинным, тогда и только тогда, когда является истинным высказывание „Если **отрицание** Z , то **отрицание** U “. (∗)

Этапы доказательства методом от противного

1. Предполагаем, что заключение Z ложно (то есть отрицание Z истинно).
2. Исходя из этого предположения, путем логических рассуждений приходим к противоречию либо аксиом, либо теорем, либо показываем, что условие U ложно (то есть отрицание U истинно).
3. Согласно (∗) заключение Z теоремы является истинным.

Пример:

Докажем методом от противного следующую теорему:

„Если две прямые имеют две различные общие точки, то прямые совпадают“.

Доказательство:

1. Предположим, что заключение „прямые совпадают“ не является истинным, то есть пусть прямые различны.
2. Получим, что через две различные точки проходят **две** различные прямые. Это противоречит аксиоме „Любые две различные точки определяют **одну и только одну** прямую“.
3. Полученное противоречие доказывает, что предположение было неверным, т. е. заключение „прямые совпадают“ является истинным. Что и требовалось доказать (ч. т. д.).

• Докажите теорему:

„Если три точки являются неколлинеарными, то каждые две из них различны“.

Замечание. Иногда для того, чтобы доказать, что высказывание не является истинным, необходимо найти пример (называемый **контрпримером**), который противоречит высказыванию.

• Докажите, что высказывание „Если целое число делится на 5, то оно оканчивается цифрой 0“ является ложным.

Упражнения и задачи

1. Выберите высказывания и установите их истинностное значение.
   а) „Через три коллинеарные точки можно провести две различные прямые“.
   б) „Периметр квадрата со стороной 0,75 см равен 30 мм“.
   в) „ $3 \cdot 3 = 10$ “.
   г) „Летом температура воздуха не ниже 5 °C“.
   д) „Существуют белые кошки“.
   е) „Скорость звука больше скорости света“.
2. Сформулируйте отрицание каждого из высказываний упражнения 1.
3. При каких целых значениях a высказывание является истинным?
   а) $a + 2 = 3$.   б) $a + a = a$.   в) $|a| = 4$.   г) $2a - 3a = -a$.

4. Укажите условие и заключение теоремы:
а) Если $a \parallel b$ и $b \parallel c$, то $a \parallel c$.
б) Если число делится на 8, то оно делится и на 4.
в) Если из четырех заданных точек каждые три точки коллинеарны, то все четыре точки коллинеарны.
г) Если a, b, c – действительные числа , $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

5. Сформулируйте высказывания, обратные теоремам из упражнения 4. Установите их истинностное значение.

6. Докажите, приведя контрпримеры, что следующие высказывания являются ложными.
а) „Если натуральное число оканчивается цифрой 7, то это число простое“.
б) „Любое число вида $\sqrt{a}$ является иррациональным“.
в) „В русском языке нет слов, которые содержат подряд 4 согласных“.
г) „Уравнение $x^2 = 2x$ не имеет целых решений“.

7. Примените метод от противного и докажите истинность высказываний.
а) „Если $a \neq b$, то $a + 3 \neq b + 3$“.
б) „Если завтра воскресенье, то сегодня суббота“.
в) „Если длина стороны равностороннего треугольника равна 8 см, то периметр треугольника равен 24 см“.
г) „Число 19 – простое“.

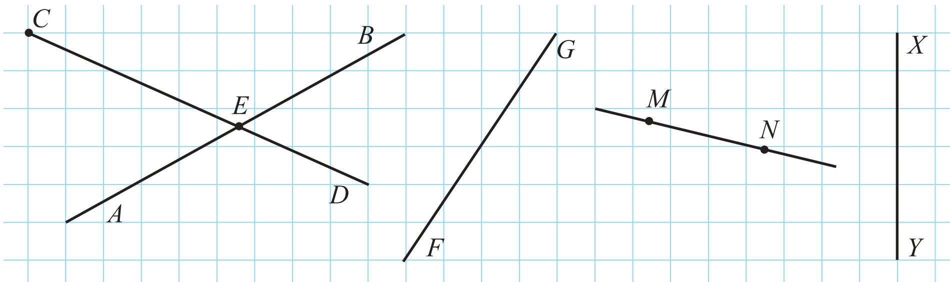
8. Сформулируйте отрицание высказываний.
а) „Любое натуральное число является рациональным“.
б) „Существуют отрицательные числа“.
в) „Все числа являются целыми“.
г) „Существуют натуральные числа, которые не являются целыми“.
Что вы заметили?

9. Дана теорема: „Если натуральное число делится на 3, то сумма его цифр также делится на 3“. Сформулируйте высказывание, обратное этой теореме. Определите ее истинностное значение.

10. Докажите, что:
а) для любого целого числа n, если $n^2 \not\vdots 16$, то $n^2 \not\vdots 4$;
б) в любом треугольнике существует не более одного тупого угла.

Упражнения и задачи на повторение

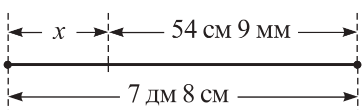
1. Рассмотрите и укажите: а) прямые; б) полупрямые; в) отрезки.

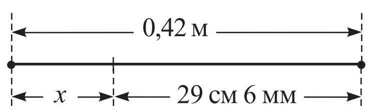


2. Прочитайте обозначения:
   а) MN, $[MN$, $[MN]$, $[NM$, m, $[mN$, α; б) d, $[dA$, $[DA]$, $[AD$, AD, $[DA$, β.

3. Прочитайте:
   а) $M \in d$ şi $M \notin l$; б) $\{X, Y, Z\} \subset \alpha$; в) $a \cap b = \{M\}$;
   г) $C \in [AB$; д) $X \notin AB$; е) $XY = YZ$.

4. Найдите x:

а) 

б) 

5. Постройте рисунок, соответствующий описанной ситуации:
   а) Точки M, R, S – коллинеарны, а прямые AB и CD пересекаются в точке R.
   б) Прямые a, b, c попарно пересекаются в точках A, B, C, $a \cap b = \{A\}$, $B \notin c$.
   в) Полупрямые $[MN$ и $[MP$ не являются противоположными полупрямыми, а точки L, N, P – коллинеарны.
   г) Точки X и Y принадлежат полупрямым $[AB$ и $[CD$.

6. Измерьте линейкой и вычислите реальную длину:
   а) автомобиля; б) грузовика.

Масштаб 1 : 90

Масштаб 1 : 160

Указание. Если масштаб рисунка 1 : n, то в реальности нарисованный предмет в n раз больше.

7. Точка M принадлежит отрезку AB. Найдите расстояние между серединами отрезков AM и MB, если AB = 6 см.

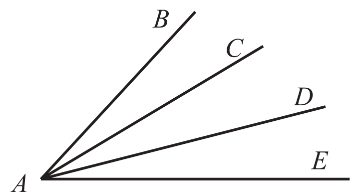
8. Четверть длины отрезка MN равна половине длины отрезка KP, который на 24 см короче. Найдите длину каждого отрезка.

9. Точки A, B, C, D – коллинеарны, AB = 1 см, BC = 2 см, CD = 4 см. Какова может быть длина отрезка AD?

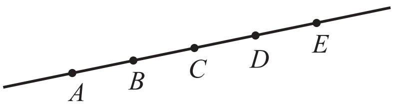
10. На линейке указаны лишь деления 0 см, 7 см и 11 см. Как с помощью этой линейки построить отрезок:
а) 18 см; б) 5 см; в) 10 см?

11. Точка C принадлежит отрезку AB. Найдите:
а) $\frac{AB}{AC}$, если $\frac{AC}{BC}=\frac{2}{5}$;
б) $\frac{BC}{AB}$, если $\frac{BC}{AC}=0{,}75$;
в) $\frac{AC}{BC}$, если $\frac{AB}{BC}=1,(3)$.

12. а) Сколько углов изображено на рисунке?
б) Сколько углов получится, если во внутренней области некоторого угла провести 5 полупрямых; 6 полупрямых?
в) Сколько полупрямых надо провести во внутренней области некоторого угла, чтобы получить 21 угол; 28 углов?



13. Рассмотрите рисунок и укажите все полупрямые.



14. Рассмотрите рисунок предыдущего упражнения и определите:
а) $[AC]\cap[BE]$; б) $[CA]\cup[AD]$; в) $[AB]\setminus[CD]$;
г) $[BE\cup[CD$; д) $[BD\cap[CA$; е) $AE\cap[BC\cap[CD$.

15. Точка A является серединой отрезка BC, $D\in BC$ так, что AD = 3,(3) см и AB = 3,75 см. Какова может быть длина отрезка CD?

16. Установите истинностное значение высказывания.
а) „Число 5 является делителем числа 20“.
б) „Разность любых двух натуральных чисел является натуральным числом“.
в) „Слово *математика* состоит из 9 букв“.
г) „Отрицание истинного высказывания является ложным“.

17. Сформулируйте обратные высказывания.
а) „Если сегодня 1 мая, то через 60 дней будет лето“.
б) „Если у Вани есть 100 леев, то ему хватит денег купить подарок за 90 леев“.
в) „Если a = 0, то $\frac{8}{a}$ не имеет смысла“.
г) „Если четырехугольник является квадратом, то у него все углы прямые“.

18. Установите истинностное значение высказываний упражнения 17 и высказываний, обратных им.

Проверочная работа

Время выполнения работы: 45 минут

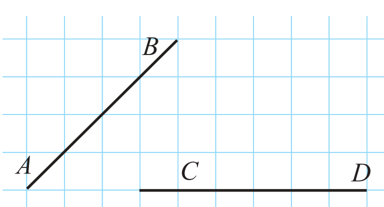
1 вариант

1. Постройте рисунок, соответствующий описанной ситуации:
$A \in BC$, $D \notin BC$, $[AB] \equiv [AC]$ и $[BD] \equiv [DC]$. **1б**

2. *Истинно* или *ложно*? **2б**
$$[AB] \cup [BA = AB.$$

3. Вычислите: **2б**
$$42 \text{ см} + 260 \text{ мм} - 3{,}6 \text{ дм}.$$

4. Найдите расстояние между прямыми AB и CD. **2б**



5. Сформулируйте и установите истинностное значение обратного высказывания: **3б**
„Если 5a = 0, то a = 0“.

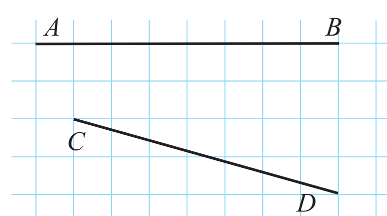
2 вариант

1. Постройте рисунок, соответствующий описанной ситуации:
$M \in [AB$, $N \in [AC$, $K \in [AD$ и $N \in MK$.

2. *Истинно* или *ложно*?
$$[AB \cup [BA = [AB].$$

3. Вычислите:
$$1{,}8 \text{ дм} + 380 \text{ мм} - 27 \text{ см}.$$

4. Найдите расстояние между прямыми AB и CD.

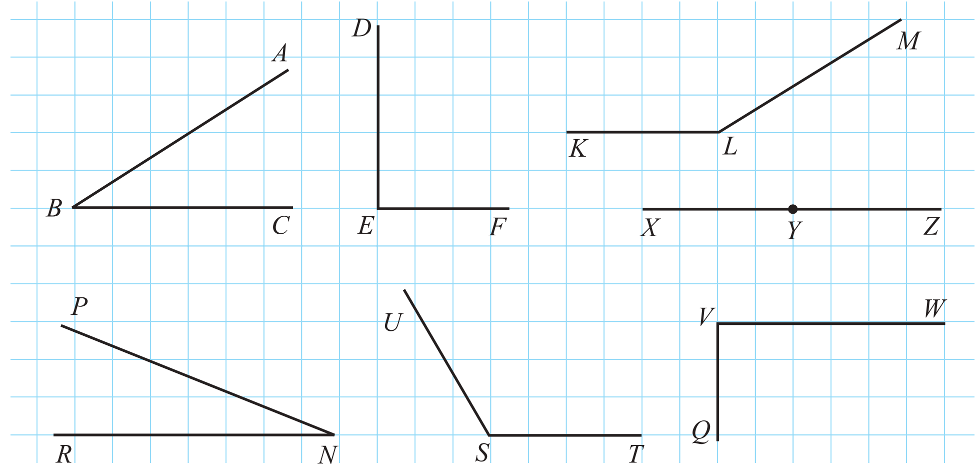


5. Сформулируйте и установите истинностное значение обратного высказывания:
„Если $n \vdots 4$, то $n \vdots 2$ “.

ГЛАВА 2 Углы. Треугольники

§1. Углы. Повторение и дополнения

1 Рассмотрите рисунок и дополните.



а) Угол – это геометрическая фигура, образованная...

б) Элементами угла ABC являются...

в) Углы DEF и QVW являются...

г) Углы ABC и PNR являются...

д) Углы ______ и ______ являются тупыми.

е) Угол XYZ – ______________.

ж) Угол, стороны которого совпадают, называется ______________.

Вспомним

Углом называется геометрическая фигура, образованная двумя полупрямыми (**стороны** угла) с общим началом (**вершина** угла).

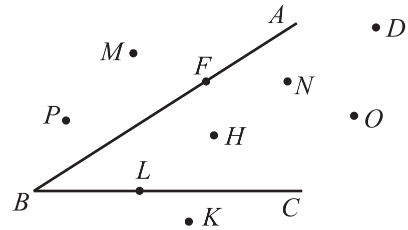
Величина **острого** угла меньше 90°.
Величина **тупого** угла больше 90° и меньше 180°.
Величина **прямого** угла равна 90°.
Величина **развернутого** угла равна 180°.
Величина **нулевого** угла равна 0°.

• Используя транспортир, найдите градусную меру изображенных углов.

2 Рассмотрите рисунок и укажите, какие точки принадлежат:

а) внутренней области угла ABC;

б) внешней области угла ABC.

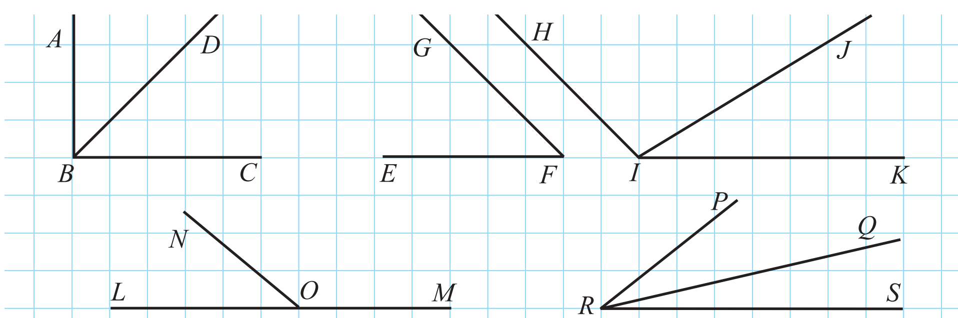


Угол ABC разделяет плоскость на два множества, которые называются **внутренней областью угла** (множество точек, заключенных между сторонами угла, обозначается Int$\angle ABC$) и **внешней областью угла** (обозначается Ext$\angle ABC$).

Определения.
- Углы одинаковой величины называются **конгруэнтными**.
- Два угла, лежащие в одной плоскости, называются **смежными*** **углами**, если у них есть общая вершина и общая сторона, которая расположена между двумя другими сторонами.
- Углы A и B называются **дополнительными до** 90°, если сумма их величин равна 90°. В этом случае угол A называется **дополнительным до** 90° углу B и наоборот.
- Углы A и B называются **дополнительными до** 180°, если сумма их величин равна 180°. В этом случае угол A называется **дополнительным до** 180° углу B.

Применим

3 Рассмотрите рисунки, измерьте углы и дополните пропуски подходящим выражением (*дополнительны до* 90°, *дополнительны до* 180°, *смежные*).



а) Углы ABD и CBD – ______.

б) Углы EFG и HIK – ______.

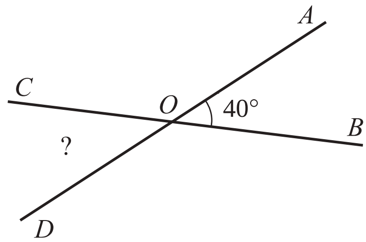
в) Углы HIJ и JIK – ______.

г) Углы LON и MON – ______.

д) Углы PRQ и QRS – ______.

* В некоторых книгах **смежными углами** называют углы, у которых одна сторона общая, а две другие являются дополнительными лучами.

4 Вычислите величину угла COD, изображенного на рисунке, если $m(\angle AOB) = 40^\circ$.



Объясняем

Углы AOB и AOC являются смежными и дополнительными до 180°.

Следовательно, $m(\angle AOC) = 180^\circ - \square$.

Углы AOC и COD являются смежными и дополнительными до 180°.

Следовательно, $m(\angle COD) = 180^\circ - \square = \square$.

• Вычислите и сравните величины углов BOD и AOC. Сделайте вывод.

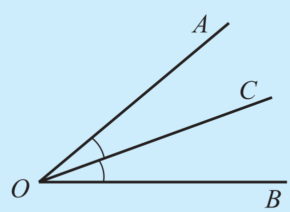
Определение. Два угла называются **вертикальными**, если у них общая вершина и их стороны являются дополнительными полупрямыми.

Свойство вертикальных углов

Вертикальные углы конгруэнтны.

• Сколько пар вертикальных углов образуют две пересекающиеся прямые?

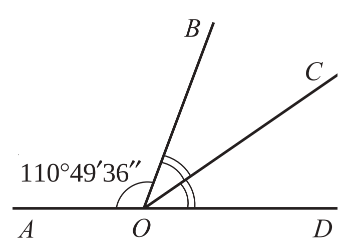
Определение. **Биссектрисой угла** называется полупрямая с началом в вершине угла, лежащая во внутренней области угла и образующая со сторонами этого угла два конгруэнтных угла.



[OC – биссектриса угла AOB.

Применим

5 Вычислите $m(\angle COD)$, если $m(\angle AOB) = 110^\circ 49' 36''$, а полупрямая [$OC$ является биссектрисой угла BOD.



Объясняем

① Сначала вычислим $m(\angle BOD)$.

Углы AOB и BOD являются смежными и дополнительными до 180°. Следовательно, $m(\angle BOD) = 180^\circ - m(\angle AOB)$.

градусы, минуты, секунды

$180^\circ - 110^\circ 49' 36'' = ?$ → $\begin{array}{r} \overset{1^\circ}{180^\circ\ 0'\ 0''} \\ -\ 110^\circ 49' 36'' \\ \hline ? \end{array}$ → $\begin{array}{r} \overset{1'}{179^\circ 60'\ 0''} \\ -\ 110^\circ 49' 36'' \\ \hline ? \end{array}$ → $\begin{array}{r} 179^\circ\ 59'\ 60'' \\ -\ 110^\circ\ 49'\ 36'' \\ \hline \square^\circ\ \square'\ 24'' \end{array}$

$m(\angle BOD) = \square^\circ\ \square' 24''$.

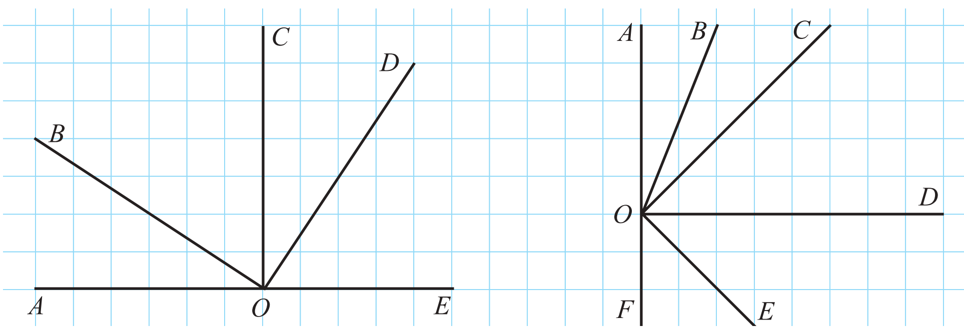
② $m(\angle COD) = m(\angle BOD) : 2 = 69^{\circ}\overset{1^{\circ}}{\curvearrowright}10' \square'' : 2 = 68^{\circ} \square' \square'' : 2 = \square^{\circ} \square' \square''$.

Ответ: $\square$.

Замечание. При выполнении арифметических действий с величинами углов учитывается, что $1^{\circ} = 60'$ и $1' = 60''$.

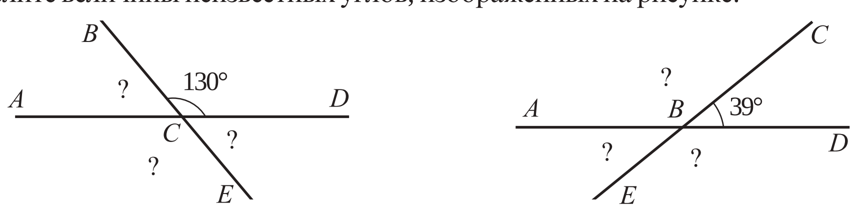
Упражнения и задачи

1. Рассмотрите рисунок и укажите углы:
   а) острые; б) прямые; в) тупые; г) развернутые.



а) б)

2. Рассмотрите рисунок предыдущего упражнения и укажите пары углов:
   а) дополнительных до 180°; б) дополнительных до 90°; в) смежных;
   г) смежных и дополнительных до 90°; д) смежных и дополнительных до 180°.
3. Вычислите величину угла:
   а) дополнительного до 90° углу, равному 60°;
   б) дополнительного до 90° углу, равному 38°;
   в) дополнительного до 180° углу, равному 70°;
   г) дополнительного до 180° углу, равному 11°.
4. Вычислите величины неизвестных углов, изображенных на рисунке:



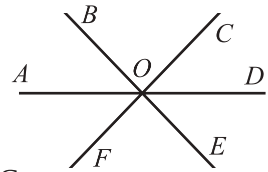
а) б)

5. Найдите величину угла, если известно, что величина ему дополнительного до 90° угла: а) в 2 раза больше; б) в 8 раз меньше; в) на 20° больше; г) на 40° меньше.
6. Найдите величину угла, если известно, что величина ему дополнительного до 180° угла: а) в 3 раза больше; б) в 5 раз меньше; в) на 50° больше; г) на 150° меньше.

7. Вычислите:
а) $48°30' + 54°40'$; б) $112°48' + 49°15'$;
в) $99°25'34'' + 27°28'29''$; г) $36°37'38'' + 39°38'37''$.

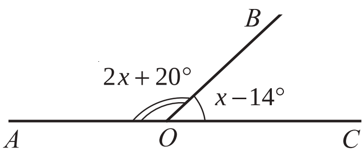
8. Вычислите:
а) $88°12' - 26°41'$; б) $170° - 64°39$; в) $95°40' - 28°54'43''$; г) $100° - 37°48'59''$.

9. Вычислите: а) $47°24' : 2$; б) $125°37' : 2$; в) $19° : 3$; г) $21° : 4$.

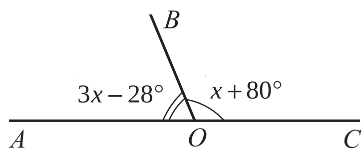


10. Рассмотрите рисунок и определите множество:
а) $\angle AOC \cap \angle BOC$; б) $\angle FOD \cap \angle AOE$;
в) $\angle FOE \cap \angle DOE$; г) $\angle BOF \cap \angle DOF$.

11. Рассмотрите рисунок и найдите величины углов AOB и BOC:



а)



б)

12. Величина угла равна 44°. Найдите величины углов, образованных биссектрисой данного угла и сторонами угла, дополнительного до 90° данному углу, и смежным с ним.

13. Величина угла равна 68°. Найдите величины углов, образованных биссектрисой данного угла и сторонами угла, дополнительного до 180° данному углу, и смежным с ним.

14. Разность величин двух углов, дополнительных до 180°, на 100° меньше их суммы. Найдите величины этих углов.

15. *Истинно* или *ложно*?
а) Величины вертикальных углов, дополнительных до 180°, равны 90°.
б) Величины вертикальных углов, дополнительных до 90°, равны 90°.
в) Величина угла, образованного биссектрисами углов, дополнительных до 90°, равна 45°.
г) Величина угла, образованного биссектрисами углов, дополнительных до 180°, равна 90°.

16. При пересечении двух прямых образуется 4 угла. Каковы величины углов, если сумма величин 3 углов равна 200°?

17. Стороны двух углов с общей вершиной попарно перпендикулярны. Каково взаимное расположение биссектрис этих углов?

18. Вычислите величину угла, образованного стрелками часов, показывающими 2 часа 10 минут.

§ 2. Треугольник и его элементы. Повторение и дополнения

Вспомним

Если A, B, C – три неколлинеарные точки, то объединение отрезков [AB], [AC], [BC] называется **треугольником** ABC. Точки A, B, C называются **вершинами** треугольника, отрезки [AB], [AC], [BC] – **сторонами** треугольника, а углы ABC, ACB, BAC – **углами** треугольника ABC.

Замечание. Внутренняя область треугольника ABC обозначается IntΔABC, а внешняя область – ExtΔABC.

1 Рассмотрите классификацию треугольников и название их элементов.

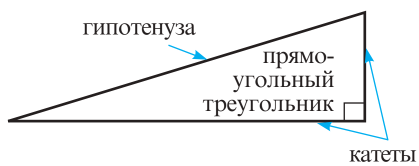
Классификация треугольника

✓ **по углам**

У **остроугольного** треугольника все углы острые.

У **прямоугольного** треугольника один угол прямой.

У **тупоугольного** треугольника один угол тупой.

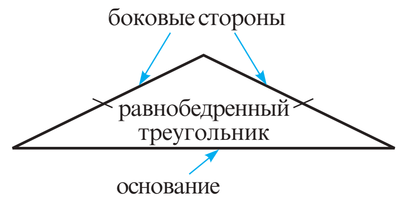


✓ **по сторонам**

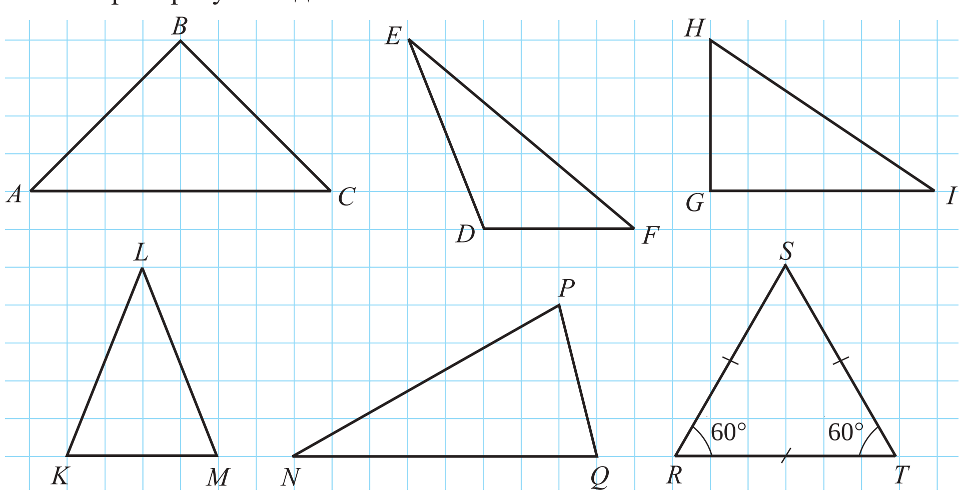
У **разностороннего** треугольника все стороны разной длины.

У **равнобедренного** треугольника две стороны конгруэнтны.

У **равностороннего** треугольника все стороны конгруэнтны.



• Рассмотрите рисунок и дополните.



а) Треугольники KLM и ______ являются остроугольными, так как ...

б) Треугольники ABC и HGI являются ______, так как ...

в) Стороны HG и GI называются ______ треугольника HGI. Сторона ______ называется гипотенузой треугольника ABC.

г) Треугольник DEF является ______, так как $m(\angle D) >$ ______.

д) Треугольники ______ и ______ являются равнобедренными, так как...

е) Треугольник NPQ является ______, так как...

ж) Треугольник ______ является равносторонним, так как...

з) Если $m(\angle N) = 35°$ и $m(\angle Q) = 75°$, то $m(\angle P) =$ ______.

Свойства

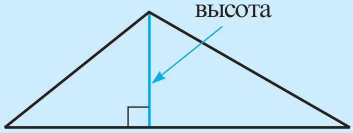
1° Из свойств расстояний следует, что для любого треугольника ABC верны соотношения:

$AB + AC > BC, \ AB + BC > AC, \ AC + BC > AB$ (**неравенства треугольника**).

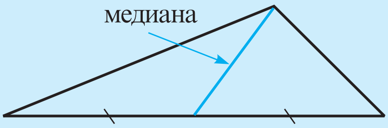
2° Сумма величин углов треугольника равна 180°.

Определения.

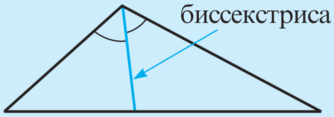
- **Высотой** треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой, в которой прямая, проходящая через эту вершину перпендикулярно прямой, содержащей противолежащую сторону, пересекает эту прямую.



- **Медианой** треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны.



- **Биссектрисой** треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противолежащей стороны.



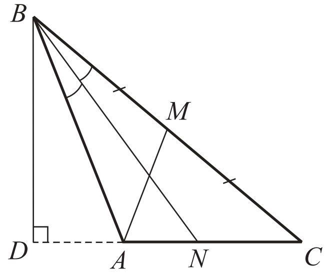
Применим

2 Рассмотрите рисунок и дополните одним из понятий: высота, медиана, биссектриса.

а) Отрезок BD является ______ треугольника ABC, так как...

б) Отрезок AM является ______ треугольника ABC, так как $[BM] \equiv [MC]$.

в) Отрезок BN является ______ треугольника ABC, так как ....



3 Вспомните определение конгруэнтных фигур и установите, какие отношения существуют между соответствующими сторонами и углами двух конгруэнтных треугольников.

Определение. Два **треугольника** называются **конгруэнтными**, если стороны и углы одного треугольника соответственно конгруэнтны сторонам и углам другого.

Замечание. При обозначении двух конгруэнтных треугольников необходимо соблюдать порядок записи вершин треугольника. Так, обозначение

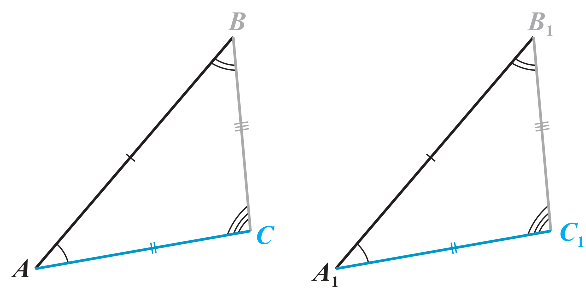
$\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$ означает, что

$\angle A \equiv \angle A_1$, $\angle B \equiv \angle B_1$, $\angle C \equiv \angle C_1$

и $[AB] \equiv [A_1B_1]$,

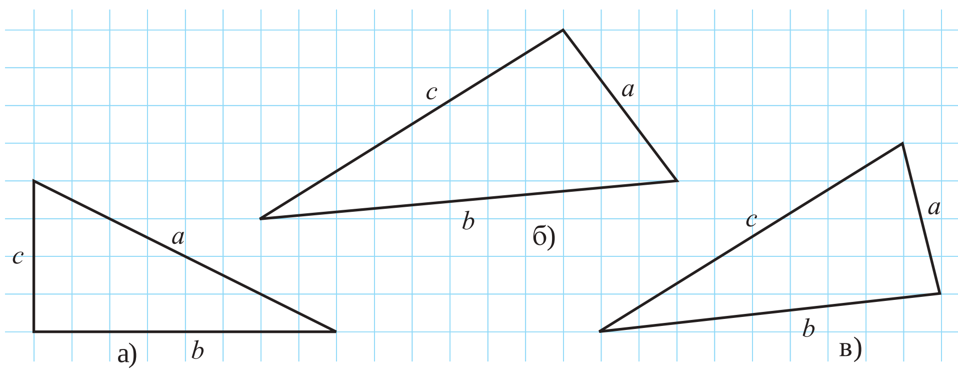
$[AC] \equiv [A_1C_1]$,

$[BC] \equiv [B_1C_1]$.



Если $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$, это не означает, что, например, $\Delta ABC \equiv \Delta B_1A_1C_1$.

4 Рассмотрите рисунок. Используя циркуль и транспортир, сравните длины сторон, затем величины углов треугольника.



Дополните:

а) ___ < b < a; б) a < ___ < ___; в) ___ < ___ < c;

___ < m($\angle B$) < ___; m($\angle A$) < ___ < ___; ___ < ___ < m($\angle C$).

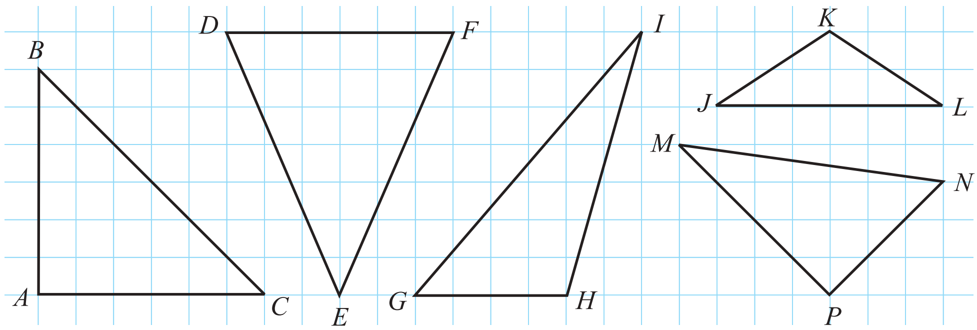
Теорема

Против большего угла треугольника лежит большая стороны.

• Высказывание, обратное данной теореме, также является теоремой. Сформулируйте теорему, обратную данной теореме.

Упражнения и задачи

1. Рассмотрите рисунок и укажите треугольники:
   а) остроугольные; б) прямоугольные;
   в) тупоугольные; г) равнобедренные;
   д) разносторонние; е) равнобедренные прямоугольные.



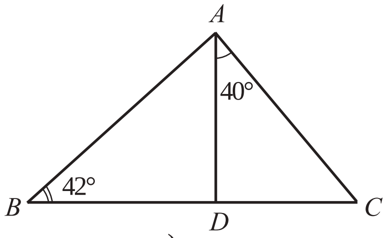
2. Назовите элементы треугольника ABC, изображенного в упражнении 1. Измерьте линейкой стороны треугольника ABC и вычислите его периметр.

3. Выполните рисунок, соответствующий описанной ситуации:
   а) Точки M и N принадлежат треугольнику ABC, точки K и L – внутренней области треугольника ABC, а точка P – внешней области треугольника ABC так, что точки A, M, N, K, P коллинеарны.
   б) Треугольник ABC – равнобедренный тупоугольный с основанием, равным 4 см.
   в) Треугольники KLM и LMN – равнобедренные прямоугольные.
   г) Треугольники KLM и KLN – равнобедренные тупоугольные и $KM \cap LN = \{R\}$.

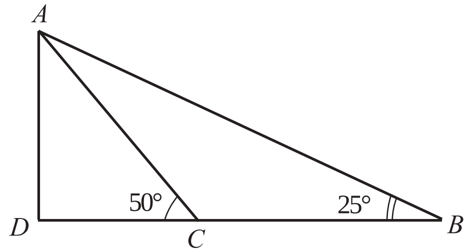
4. Дан треугольник ABC. Вычислите $\mathrm{m}(\angle A)$, если:
   а) $\mathrm{m}(\angle B) = \mathrm{m}(\angle C) = 35°$;
   б) $\mathrm{m}(\angle B) = 48°$, $\mathrm{m}(\angle C) = 84°$;
   в) $\mathrm{m}(\angle B) + \mathrm{m}(\angle C) = 130°$;
   г) $\mathrm{m}(\angle A) = \mathrm{m}(\angle B) = \mathrm{m}(\angle C)$.

5. Вычислите периметр треугольника ABC, если:
   а) $AB = AC = BC = 9{,}7$ см;
   б) $AB = 2AC = 16$ см, $BC = 10{,}6$ см;
   в) $AB = 0{,}8(AC + BC) = 12$ см;
   г) $AB + AC = 15$ см, $AB + BC = 16$ см, $AC + BC = 17$ см.

6. Рассмотрите рисунок и вычислите величину угла A треугольника ABC, если AD – высота треугольника ABC.

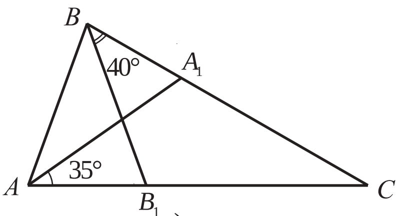


а)

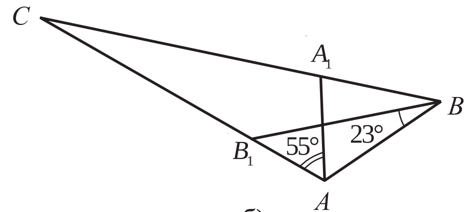


б)

7. Рассмотрите рисунок и вычислите величины углов треугольника ABC, если $[AA_1]$ и $[BB_1]$ – биссектрисы углов треугольника ABC.



а)



б)

8. $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ – медианы треугольника ABC. Вычислите периметр треугольника ABC, если: а) $AC_1 = 7{,}8$ см, $BA_1 = 9$ см, $CB_1 = 8{,}7$ см;

б) $BC_1 = \sqrt{8}$ см, $BA_1 = \sqrt{18}$ см, $AB_1 = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ см.

9. Определите, могут ли следующие три числа выражать длины (одной и той же единицы измерения) сторон треугольника:

а) 7, 9, 17; б) 3, 10, 13; в) 12, 11, 20; г) $\sqrt{8},\ 3\sqrt{2},\ \sqrt{32}$.

10. Найдите наибольший и наименьший по величине углы треугольника ABC, если:

а) $AB = 8$ см, $BC = 7$ см, $AC = 9$ см; б) $AB = \dfrac{2}{3}AC$, $AC = 1{,}2BC$;

в) $AB = 4\sqrt{3}$ см, $BC = 3\sqrt{5}$ см, $AC = 7$ см.

11. Запишите стороны треугольника ABC в порядке возрастания их длин, если:

а) $m(\angle A) = 30°$, $m(\angle B) = 70°$; б) $m(\angle B) = 60°$, $m(\angle C) = 10°$;

в) $m(\angle A) < m(\angle B) < 45°$.

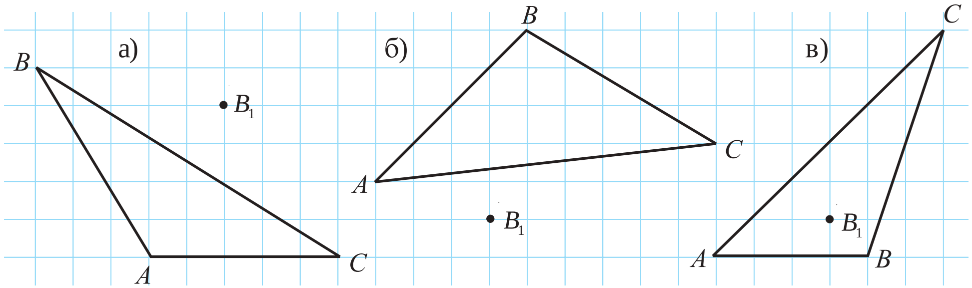
☑☑☐

12. Периметр треугольника ABC равен 44 см, а периметр треугольника ACD – 52 см. Чему равен периметр треугольника ABD, если $AC = 18$ см и $C \in [BD]$?

13. Вычислите периметр равностороннего треугольника ABC, если $M \in [AC]$ и $AM = 3MC = 12{,}6$ см.

14. Вычислите площадь треугольника ABC, если $m(\angle B) = 90°$, $AB = 12{,}4$ см и $BC = 8{,}5$ см.

15. Перечертите рисунок и постройте треугольник $A_1B_1C_1$, конгруэнтный треугольнику ABC так, чтобы точка B_1 соответствовала вершине B.



16. *Истинно* или *ложно*?

а) Если ΔABC – равнобедренный с основанием $[AC]$, то $\Delta ABC \equiv \Delta CBA$.

б) Если $\Delta ABC \equiv \Delta CBA$, то ΔABC – равнобедренный.

в) Если $\Delta ABC \equiv \Delta CBA \equiv \Delta BAC$, то ΔABC – равносторонний.

г) Если $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$, $m(\angle B) = 90°$ и $m(\angle A) + m(\angle D) = 70°$, то $m(\angle F) = 20°$.

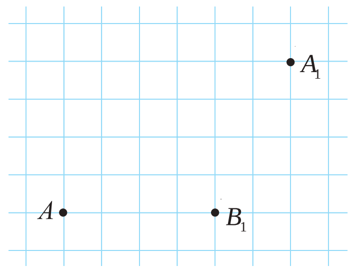
17. Длины сторон треугольника выражены последовательными натуральными числами. Найдите эти длины, если периметр треугольника равен 54 см.

18. *Истинно* или *ложно*?

а) Существует треугольник со сторонами 6 см, 8 см, 14 см.

б) Высота треугольника не длиннее медианы, проведенной к той же стороне.

19. Точка A, изображенная на рисунке, является вершиной треугольника ABC, а точки A_1 и B_1 – середины сторон BC и AC этого треугольника. Перечертите рисунок и линейкой и циркулем „восстановите“ треугольник ABC.



20. Дан треугольник ABC. Величина угла A в 1,8 раза меньше величины угла B и в 5 раз больше величины угла C. Найдите величины углов треугольника.

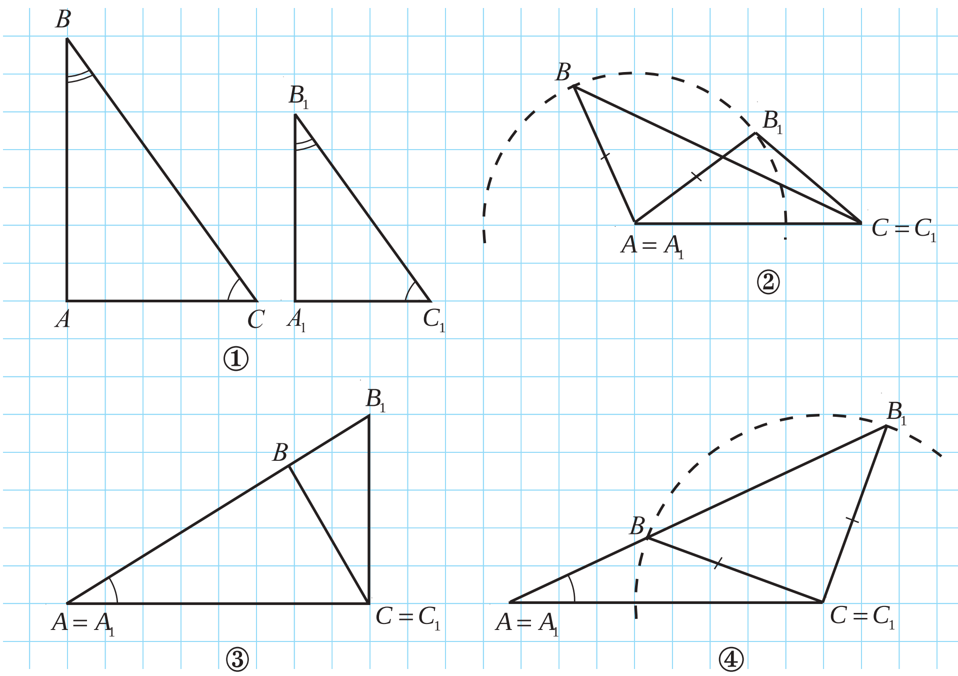
21. Какой длины может быть сторона AB треугольника ABC, если AB на 2 см больше $\frac{AC}{2}$ и на 32 см меньше 2BC?

22. Докажите, что если AB – сторона наименьшей длины треугольника ABC, то $m(\angle C) < 90°$.

§ 3. Признаки конгруэнтности треугольников

3.1. Признаки конгруэнтности произвольных треугольников

Рассмотрите рисунок и запишите для каждого случая пары конгруэнтных элементов треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.



• Определите, является ли высказывание истинным.

а) „Если углы одного треугольника соответственно конгруэнтны углам другого треугольника, то такие треугольники конгруэнтны."

б) „Если две стороны одного треугольника соответственно конгруэнтны двум сторонам другого треугольника, то такие треугольники конгруэнтны."

в) „Если сторона и угол одного треугольника конгруэнтны стороне и углу другого треугольника, то такие треугольники конгруэнтны."

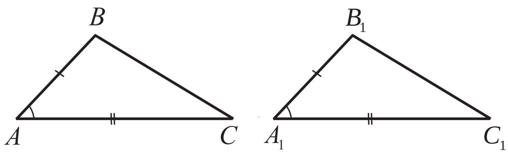
Сделайте вывод.

Замечание. Можно сделать вывод: чтобы утверждать, что треугольники конгруэнтны, недостаточно знать два их элемента. На основании признаков конгруэнтности можно утверждать, что два треугольника конгруэнтны при условии, что существуют три пары соответственно конгруэнтных элементов этих треугольников, из которых хотя бы одной парой является пара сторон.

Признаки конгруэнтности двух произвольных треугольников

1. **Признак СУС** (сторона–угол–сторона)

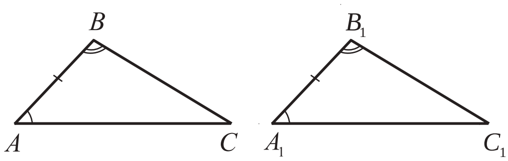
Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно конгруэнтны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники конгруэнтны.



$$\left.\begin{array}{l}[AB]\equiv[A_1B_1]\\ [AC]\equiv[A_1C_1]\\ \angle A\equiv\angle A_1\end{array}\right| \rightarrow \Delta ABC\equiv\Delta A_1B_1C_1$$

2. **Признак УСУ** (угол–сторона–угол)

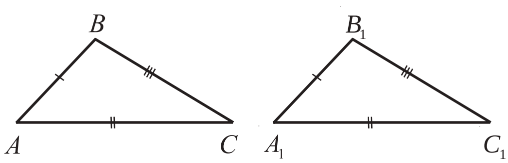
Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника соответственно конгруэнтны стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники конгруэнтны.



$$\left.\begin{array}{l}[AB]\equiv[A_1B_1]\\ \angle A\equiv\angle A_1\\ \angle B\equiv\angle B_1\end{array}\right| \rightarrow \Delta ABC\equiv\Delta A_1B_1C_1$$

3. **Признак ССС** (сторона–сторона–сторона)

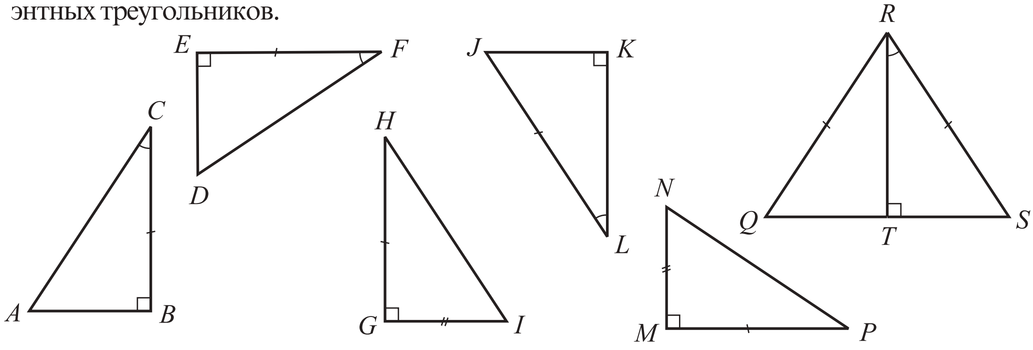
Если три стороны одного треугольника соответственно конгруэнтны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники конгруэнтны.



$$\left.\begin{array}{l}[AB]\equiv[A_1B_1]\\ [AC]\equiv[A_1C_1]\\ [BC]\equiv[B_1C_1]\end{array}\right| \rightarrow \Delta ABC\equiv\Delta A_1B_1C_1$$

3.2. Признаки конгруэнтности прямоугольных треугольников

Рассмотрите рисунок. Примените признаки конгруэнтности и найдите пары конгруэнтных треугольников.



Объясняем

$\Delta ABC \equiv \Delta DEF$ согласно признаку ____ .

$\Delta HGI \equiv \Delta PMN$ согласно признаку ____ .

$\Delta LKJ \equiv \Delta RTS$ согласно признаку ____ (так как $m(\angle J) = 90^\circ - m(\angle L) = 90^\circ - m(\angle R) = m(\angle S)$).

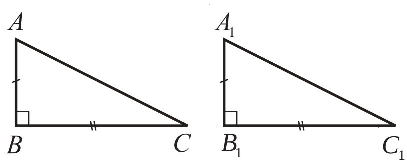
Позже будет доказано, что высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является и медианой и биссектрисой этого треугольника. Следовательно, $[QT] \equiv [ST]$. Значит, ____ $\equiv \Delta SRT$, согласно признаку ССС.

Замечание. Так как у двух прямоугольных треугольников есть прямой угол, из этого следует, что два прямоугольных треугольника конгруэнтны, если существуют две пары соответственно конгруэнтных элементов, из которых хотя бы одной парой является пара сторон.

Признаки конгруэнтности двух прямоугольных треугольников

1. **Признак КК** (катет–катет)

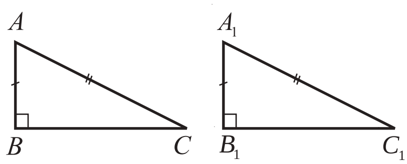
Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно конгруэнтны катетам другого, то такие треугольники конгруэнтны.



$$\left.\begin{array}{l} m(\angle B) = m(\angle B_1) = 90^\circ \\ [AB] \equiv [A_1B_1] \\ [BC] \equiv [B_1C_1] \end{array}\right| \rightarrow \Delta\, ABC \equiv \Delta\, A_1B_1C_1$$

2. **Признак ГК** (гипотенуза–катет)

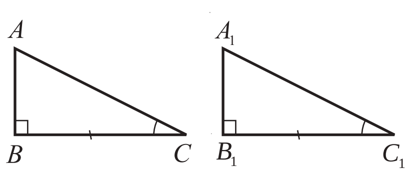
Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно конгруэнтны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники конгруэнтны.



$$\left.\begin{array}{l} m(\angle B) = m(\angle B_1) = 90^\circ \\ [AB] \equiv [A_1B_1] \\ [AC] \equiv [A_1C_1] \end{array}\right| \rightarrow \Delta\, ABC \equiv \Delta\, A_1B_1C_1$$

3. **Признак КУ** (катет–прилежащий острый угол)

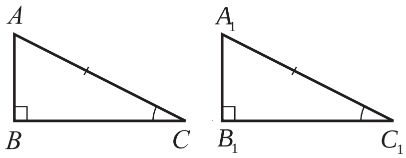
Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно конгруэнтны катету и прилежащему к нему острому углу другого, то такие треугольники конгруэнтны.



$$\left.\begin{array}{l} m(\angle B) = m(\angle B_1) = 90^\circ \\ [BC] \equiv [B_1C_1] \\ m(\angle C) = m(\angle C_1) \end{array}\right| \rightarrow \Delta\, ABC \equiv \Delta\, A_1B_1C_1$$

4. **Признак ГУ** (гипотенуза–острый угол)

Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника конгруэнтны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники конгруэнтны.



$$\left.\begin{array}{l} m(\angle B)=m(\angle B_1)=90^\circ \\ [AC]\equiv[A_1C_1] \\ m(\angle C)=m(\angle C_1) \end{array}\right| \Rightarrow \Delta ABC\equiv\Delta A_1B_1C_1$$

3.3. Построение треугольников

1 Линейкой и циркулем построим треугольник со сторонами 6 см, 5 см, 4 см.

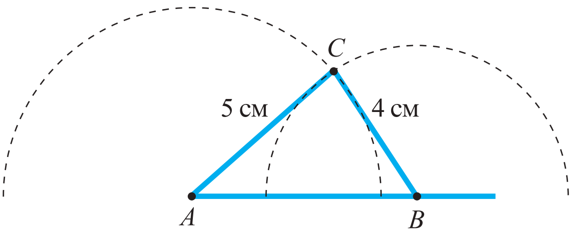
Объясняем

Согласно признаку ССС данных задачи достаточно для построения треугольника.

① Построим полупрямую [AM и отложим на ней с помощью циркуля отрезок AB, равный 6 см.

② Установим ножку циркуля в точке A и построим полуокружность радиуса 5 см.

③ Построим полуокружность с центром в точке B радиуса 4 см. Эти две полуокружности пересекаются в точке C.

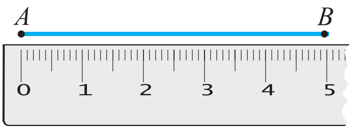


Построенный треугольник ABC удовлетворяет условию задачи.

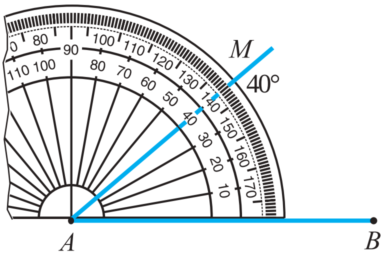
2 Линейкой, циркулем и транспортиром построим треугольник со стороной 5 см и двумя прилежащими к ней углами 40° и 45°.

Объясняем

① Построим отрезок AB, равный 5 см.

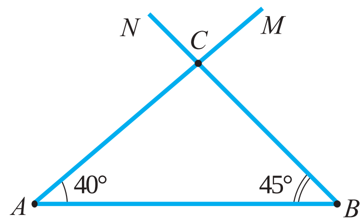


② Установим центр транспортира в точке A и отметим точку M, соответствующую делению 40°. Построим полупрямую [AM.



③ Аналогично строим полупрямую [BN, которая с полупрямой [BA образует угол 45°. Обозначим через C точку пересечения полупрямых [AM и [BN.

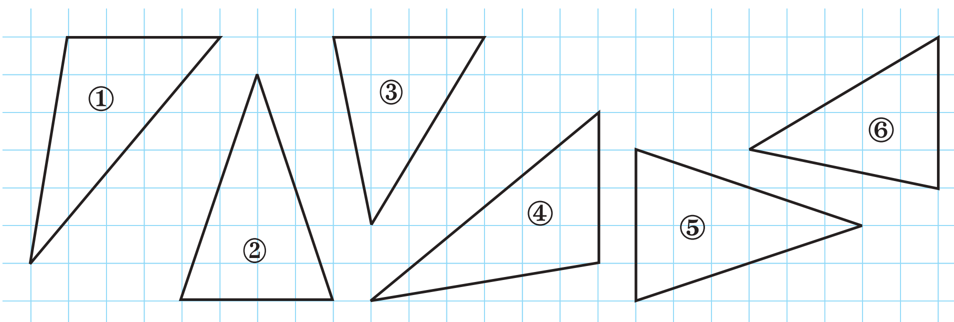
Построенный треугольник ABC удовлетворяет условию задачи.



• Линейкой, транспортиром и циркулем постройте треугольник со сторонами 5 см и 6 см и углом между ними 60°.

Упражнения и задачи

1. Рассмотрите каждый рисунок и укажите пары конгруэнтных треугольников.



2. Треугольники ABC и DEF конгруэнтны. Перепишите и дополните:

$[AB] \equiv [DE]$, ______ $\equiv DF$, $EF \equiv$ ______,

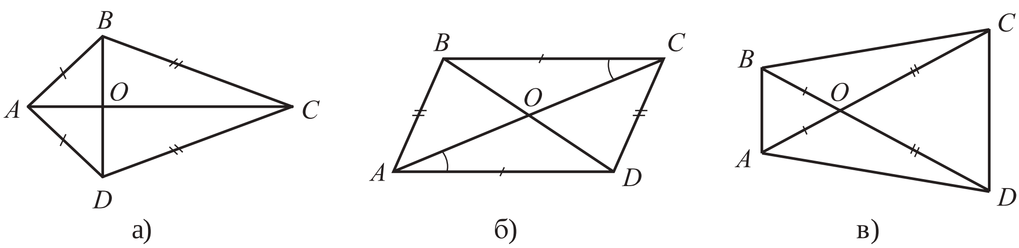
$\angle A \equiv$ ______, $\angle E \equiv$ ______, ______ $\equiv \angle C$.

3. Треугольники ABC и CAD конгруэнтны. Перепишите и дополните:

а) ______ $\equiv [AB]$, ______ $\equiv [DC]$, $[BC] \equiv$ ______, $\angle A \equiv$ ______, $\angle B \equiv$ ______.

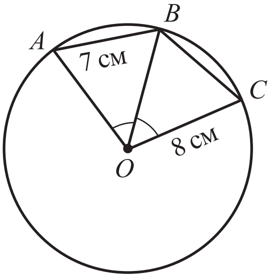
б) Треугольники ABC и CAD являются ______.

4. Применив признаки конгруэнтности, укажите пары конгруэнтных треугольников.



5. Даны треугольники ABC и DEF, у которых $\angle A \equiv \angle D$, $[AB] \equiv [DE]$. Запишите еще одно соотношение между элементами треугольников так, чтобы выполнялся признак конгруэнтности:
а) СУС; б) УСУ.

6. Рассмотрите рисунок и найдите длину отрезков AO, BO и BC, если точка O – центр окружности.



7. Постройте треугольник со сторонами, равными:
а) 6 см, 7 см, 8 см; б) 5 см, 3 см, 6 см.

8. Постройте треугольник с двумя сторонами, равными:
а) 3 см и 4 см и углом между ними 45°;
б) 5 см и 6 см и углом между ними 120°.

9. Постройте треугольник:
а) со стороной 4 см и двумя прилежащими к ней углами 30° и 50°;
б) со стороной 6 см и двумя прилежащими к ней углами 25° и 60°.

10. Точка M – середина стороны AB треугольника ABC и $CM \perp AB$. Найдите AC, если $BC = 8$ см.

11. Отрезок EH является биссектрисой и высотой треугольника DEF.
Найдите $m(\angle D)$, если $m(\angle F) = 40°$.

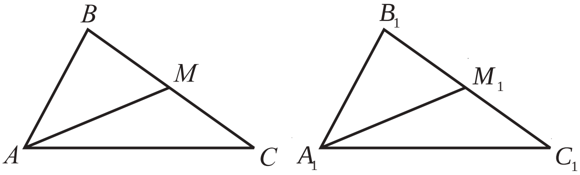
12. Постройте равносторонний треугольник, периметр которого равен 15 см.

13. Постройте равнобедренный треугольник с основанием 5 см и периметром 17 см.

14. Можно ли построить треугольник со сторонами:
а) 2 см, 3 см, 5 см; б) 3 см, 7 см, 3 см?
Обоснуйте ответ.

15. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, которая является серединой этих отрезков. Найдите AC и BC, если $AD = 10$ см, $BD = 9$ см.

16. Рассмотрите рисунок.
$[AB] \equiv [A_1B_1]$, $[BC] \equiv [B_1C_1]$, $[AM] \equiv [A_1M_1]$ и $[AM]$, $[A_1M_1]$ являются медианами треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Докажите, что $\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$.

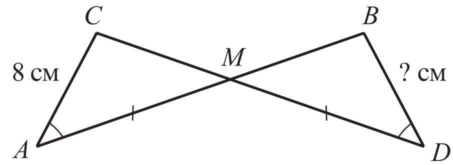


17. Докажите, что биссектрисы углов ромба содержат диагонали этого ромба.

18. Углы одного треугольника соответственно конгруэнтны углам другого треугольника и две стороны первого треугольника конгруэнтны двум сторонам второго треугольника. Можно ли утверждать, что данные треугольники конгруэнтны?

§4. Метод конгруэнтных треугольников

1 Отрезки AB и CD пересекаются в точке M так, что $AM = DM$, $AC = 8$ см и $m(\angle CAM) = m(\angle BDM)$.
Найдем длину отрезка BD.



Объясняем

Рассмотрим треугольники AMC и DMB.

$[AM] \equiv [DM]$.

$\angle CAM \equiv$ ___.

Углы AMC и ___ – вертикальные. Следовательно, $\angle AMC \equiv$ ___.

Применив признак УСУ, можно утверждать, что $\Delta AMC \equiv$ ___.

Значит, $[AC] \equiv$ ___ и $BD =$ ___ см.

Ответ: $BD =$ ___ см.

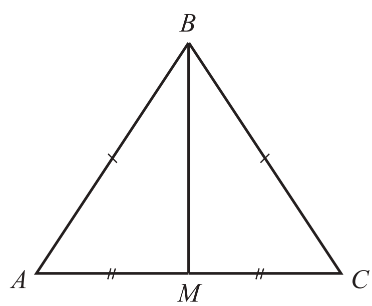
Задача решена *методом конгруэнтных треугольников*.

Метод конгруэнтных треугольников применяется для доказательства конгруэнтности двух отрезков или углов. Чтобы это доказать, нужно:
- включить эти два отрезка (или угла) в два треугольника, конгруэнтность которых можно доказать, используя признаки СУС, УСУ, ССС;
- сделать вывод, что отрезки (или углы) конгруэнтны, если они являются соответствующими элементами конгруэнтных треугольников, в которые были включены.

Образец доказательства теоремы

2 Докажем, что медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является и биссектрисой этого треугольника.

Объясняем



① Выполним рисунок, соответствующий условию.

② Переформулируем условие задачи, используя обозначения рисунка:
„Докажем, что медиана BM, проведенная к основанию AC равнобедренного треугольника ABC, является и его биссектрисой“.

③ Для того чтобы уточнить условие и заключение высказывания, которое надо доказать, запишем последнее утверждение в виде:
Если Условие, *то* Заключение.
Если треугольник ABC равнобедренный и [BM] – медиана, проведенная к основанию AC, *то* [BM] является биссектрисой треугольника ABC.

④ Уточним условие: ...
Уточним заключение: ...

⑤ Запишем коротко утверждение и доказательство:

Условие: $\Delta ABC,\ [AB]\equiv[CB],\ M\in[AC],\ [AM]\equiv[CM].$

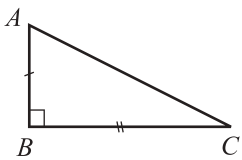
Заключение: $\angle ABM\equiv\angle CBM$.

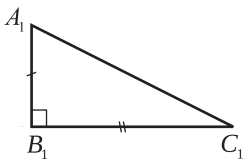
Доказательство:

$$\left.\begin{array}{l}[AB]\equiv[CB]\ \text{(по условию)}\\ [AM]\equiv[CM]\ \text{(по условию)}\\ [BM]\ \text{– общая сторона}\end{array}\right\}\overset{\text{ССС}}{\Rightarrow}\Delta ABM\equiv\Delta CBM\overset{\text{опр}}{\Rightarrow}\angle ABM\equiv\angle CBM\ \text{(ч.т.д.)}.$$ ►

Замечание. Как правило, шаги ②–④ выполняют устно.

3 Применяя метод конгруэнтных треугольников, докажем признак конгруэнтности прямоугольных треугольников КК.





Условие: $\Delta ABC,\ \Delta A_1B_1C_1$ – прямоугольные,

$[AB]\equiv[A_1B_1],\ [BC]\equiv[B_1C_1].$

Заключение: $\Delta ABC\equiv\Delta A_1B_1C_1$

Доказательство:

① $m(\angle ABC)=m(A_1B_1C_1)=90°$. Значит, $\angle ABC\equiv\angle A_1B_1C_1$. $(*)$

② Согласно условию и соотношению $(*)$, применяя признак конгруэнтности произвольных треугольников СУС, получим $\Delta ABC\equiv\Delta A_1B_1C_1$ (ч.т.д.). ►

• Докажите, аналогично, признак конгруэнтности прямоугольных треугольников КУ.

Упражнения и задачи

1. Рассмотрите рисунок 1 и вычислите AD, DC и BD, если $AB=9$ см, $BC=6$ см, $DE=3$ см.

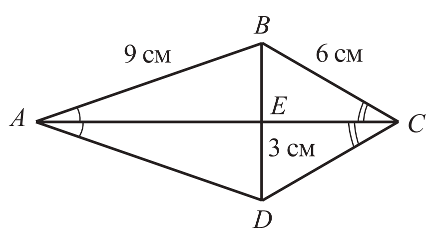


Рис. 1

2. Пусть $[AM]$ – медиана треугольника ABC и $D\in[AM$ так, что $AM=MD$. Найдите BD и CD, если $AB=5$ см, $AC=6$ см.

3. Рассмотрите рисунок 2 и укажите другие пары конгруэнтных отрезков.

4. Отрезок BD – медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника ABC. Найдите BD, если периметры треугольников ABC и ABD равны 48 см и 36 см соответственно.

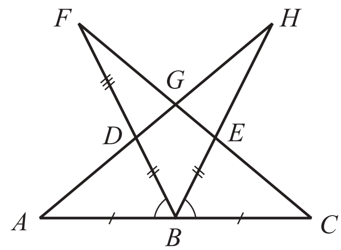


Рис. 2

5. Рассмотрите рисунок 3. Докажите, что $[AM]$ является биссектрисой треугольника ABC.

6. Рассмотрите рисунок 4 и найдите величину угла ACD.

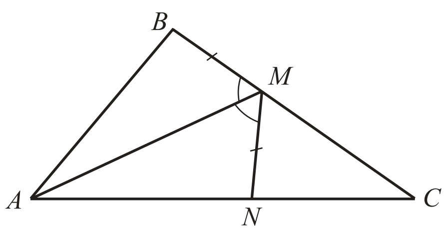


Рис. 3

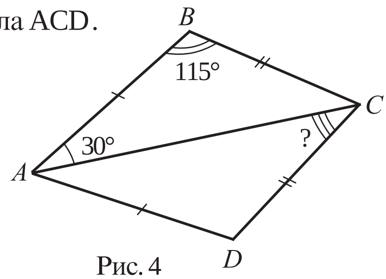


Рис. 4

7. Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\angle A \equiv \angle A_1$, $[AB] \equiv [A_1B_1]$, $[BC] \equiv [B_1C_1]$, $m(\angle C) = 80°$, а угол C_1 – тупой. Найдите $m(\angle C_1)$.

8. Рассмотрите рисунок 5. Докажите, что $\angle BAF \equiv \angle DEG$ и $[AB] \equiv [DE]$, если $[AG] \equiv [FE]$, $m(\angle B) = m(\angle D)$, $m(\angle CGF) = m(\angle CFG)$.

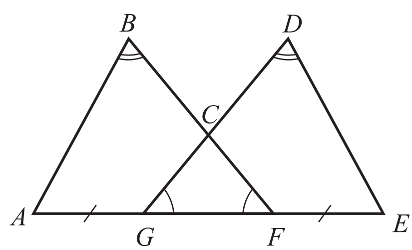


Рис. 5

9. Рассмотрите рисунок 6. Найдите AB, если $DE = 7$ см.
Указание. Исследуйте треугольники ABE и ADE.

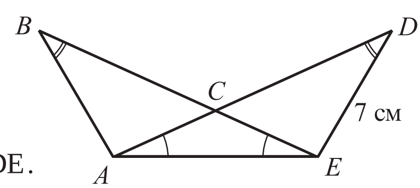


Рис. 6

10. Рассмотрите рисунок 7. Найдите BE, если $FC = 10$ см.
Указание. Исследуйте треугольники ABE и AFC.

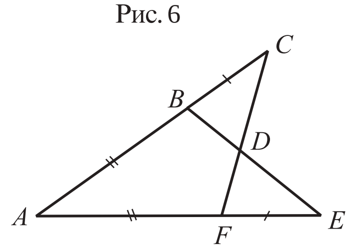


Рис. 7

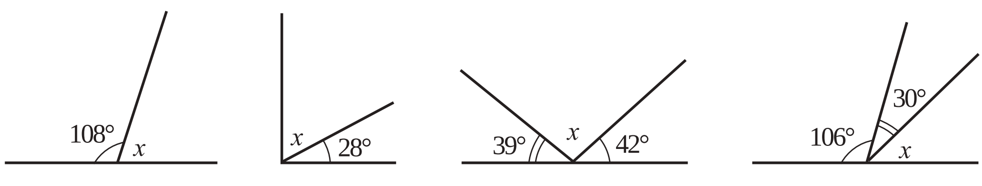
11. Окружности с центрами O и O_1 пересекаются в точках A и B. Докажите, что прямые AB и OO_1 перпендикулярны.

12. Докажите, что длина стороны любого треугольника меньше полупериметра этого треугольника.

13. Точка D принадлежит внутренней области треугольника ABC. Докажите, что $m(\angle A) < m(\angle ADC)$.

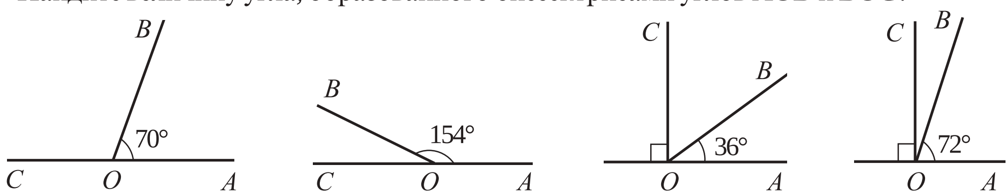
Упражнения и задачи на повторение

1. Рассмотрите рисунок и вычислите величину угла x.



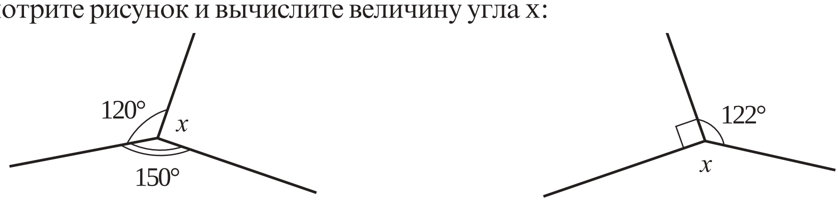
а) б) в) г)

2. Найдите величину угла, образованного биссектрисами углов AOB и BOC.



а) б) в) г)

3. Рассмотрите рисунок и вычислите величину угла x:



а) б)

4. Сумма величин двух вертикальных углов A и B равна 150°. Найдите $m(\angle A)$ и $m(\angle B)$.

5. Разность величин двух углов, дополнительных до 90°, равна 50°. Найдите величины этих углов.

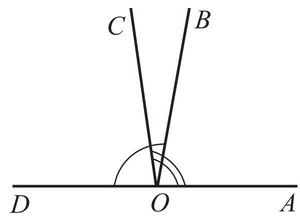
6. Найдите величины двух углов, дополнительных до 180°, если разность их величин равна 70°.

7. Вычислите:

а) $81°42' + 32°59'$; б) $100°20' - 27°34'$;

в) $47°24'39'' + 19°25'44''$; г) $116°21'5'' - 68°7'28''$.

8. Найдите величины углов, образованных биссектрисой угла в $17°34'12''$ и его сторонами.



9. Найдите величину угла BOC, если $m(\angle AOC) = 98°$, $m(\angle BOD) = 100°$ и $O \in DA$.

10. Вычислите периметр треугольника:

а) равностороннего со стороной, равной 11 см;

б) равнобедренного, одна сторона которого равна 19 см и другая 8 см;

в) разностороннего, длины сторон которого выражены последовательными натуральными числами, наибольшая из которых равна 10 см;

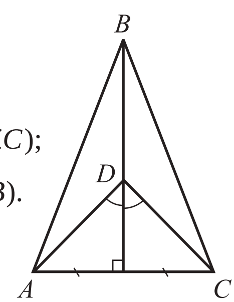
г) прямоугольного со сторонами 5 см, 12 см и 13 см.

11. Найдите величину угла B треугольника ABC, если:

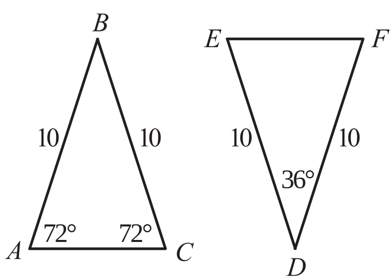
а) $m(\angle A) = m(\angle C) = 50°$; б) $m(\angle A) = 2m(\angle B) = m(\angle C)$;

в) $m(\angle A) = \frac{1}{2}m(\angle B) = m(\angle C)$; г) $m(\angle A) + m(\angle C) = m(\angle B)$.

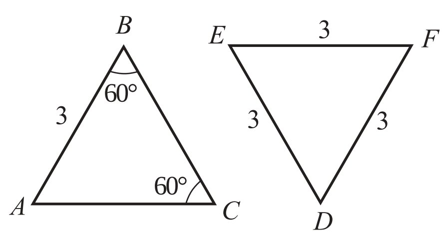
12. Рассмотрите рисунок и запишите пары конгруэнтных отрезков.



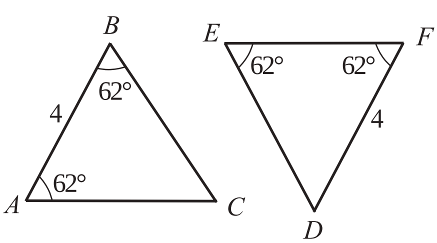
13. Рассмотрите рисунок и определите, являются ли треугольники конгруэнтными.



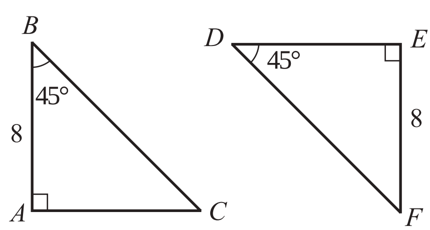
а)



б)



в)



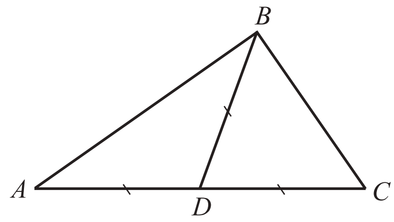
г)

14. Постройте треугольник со сторонами 5 см, 6 см, 8 см.

15. Постройте треугольник со сторонами 5 см и 7 см и углом между ними 140°.

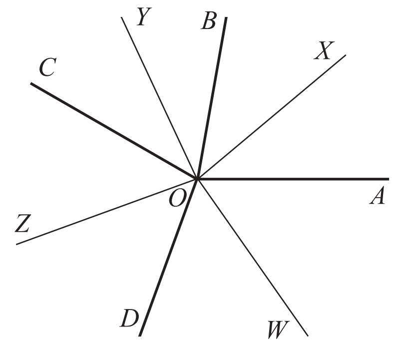
16. Постройте треугольник со стороной 7 см и двумя прилежащими к ней углами 45° и 55° соответственно.

17. Дан треугольник ABC и $D \in [AC]$ так, что $[AD] \equiv [BD] \equiv [CD]$ (см. рисунок). Докажите, что $m(\angle ABC) = 90°$.

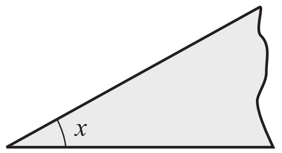


18. 10 прямых пересекаются в одной точке. Докажите, что величина хотя бы одного из образованных углов меньше 20°.

19. Из точки O провели 4 полупрямые: $[OA$, $[OB$, $[OC$ и $[OD$ (см. рисунок). Полупрямые $[OX$, $[OY$, $[OZ$ и $[OW$ являются биссектрисами углов AOB, BOC, COD и DOA. Докажите, что среди углов XOY, YOZ, ZOW, WOX есть две пары углов, дополнительных до 180°.



20. На рисунке изображен предмет, с помощью которого можно построить угол x°. Как с помощью этого предмета построить угол:
а) 9°, если x = 19°;
б) 4°, если x = 23°;
в) 3°, если x = 31°;
г) 19°, если x = 38°?



21. Найдите величину угла, образованного стрелками часов, показывающими:
а) 2 часа 20 минут; б) 1 час 15 минут.

22. Две окружности с радиусами 3 см и 5 см соответственно, пересекаются в двух точках. Докажите, что расстояние между центрами окружностей не меньше 2 см и не больше 8 см.

Проверочная работа

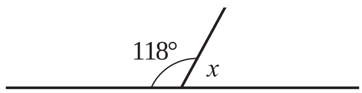
Время выполнения работы: 45 минут

1 вариант

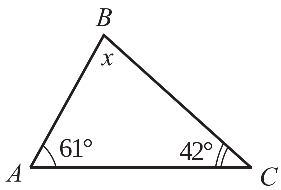
2 б

1. Найдите величину угла x:

а)



б)



2 б

2. Найдите угол, дополнительный до 90°, и угол, дополнительный до 180°, углу A, если:

$$m(\angle A) = 36°.$$

2 б

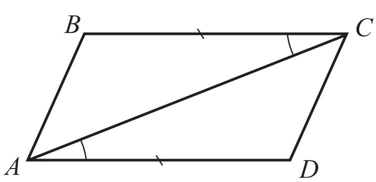
3. Вычислите:

а) $48°36' + 25°31'$;

б) $80° - 34°25'$.

2 б

4. Запишите конгруэнтные треугольники:



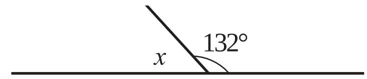
2 б

5. Длины сторон треугольника прямо пропорциональны числам 4, 5, 6. Найдите длины этих сторон, если периметр треугольника равен 45 см.

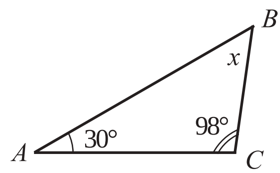
2 вариант

1. Найдите величину угла x:

а)



б)



2. Найдите угол, дополнительный до 90°, и угол, дополнительный до 180°, углу A, если:

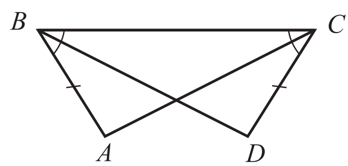
$$m(\angle A) = 28°.$$

3. Вычислите:

а) $37°46' + 24°22'$;

б) $90° - 36°27'$.

4. Запишите конгруэнтные треугольники:



5. Длины сторон треугольника прямо пропорциональны числам 3, 4, 5. Найдите длины этих сторон, если периметр треугольника равен 48 см.

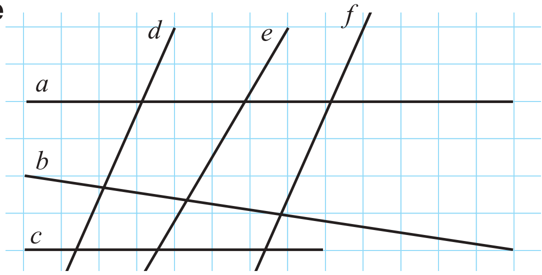
ГЛАВА 3

Параллельность и перпендикулярность

§1. Параллельные прямые

1.1. Параллельные прямые

1 Рассмотрите рисунок. Обратите внимание на взаимное расположение прямых и дополните подходящим словом или выражением.



а) Прямые a и b – ____________, так как ____________________.

б) Прямые d и c – ____________, так как ____________________.

в) Прямые a и c – ____________, так как ____________________.

г) Прямые e и f – ____________, так как ____________________.

Замечание. Очевидно, вывод о том, что две прямые параллельны или не параллельны, нужно „скрепить“ математически. С этой целью в дальнейшем мы изучим признаки параллельности прямых.

Определение. Две **прямые** называются **параллельными**, если они компланарны и у них нет общих точек или совпадают.

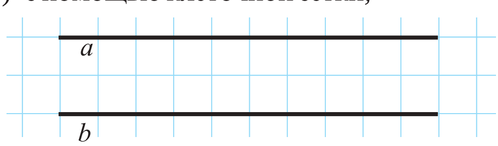
Обозначаем: $a \parallel b$. *Читаем*: „Прямые a и b параллельны“.

Если прямые a и b непараллельны, то обозначаем $a \nparallel b$.

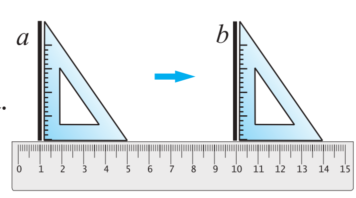
• Параллельные прямые можно построить:

а) с помощью линейки;

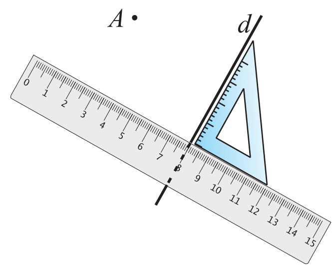
б) с помощью клеточной сетки;



в) с помощью линейки и угольника.



2 Рассмотрите рисунок и объясните, как можно построить прямую, параллельную прямой d и проходящую через точку A. Сколько таких прямых можно построить?



Аксиома параллельных прямых (или **аксиома Евклида**)

Через точку, не лежащую на прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной прямой.

• Учитывая, что две различные точки определяют единственную прямую, определите, сколько пар параллельных прямых можно построить так, чтобы любой паре принадлежали три заданные неколлинеарные точки.

3 Применив метод от противного и аксиому параллельности прямых, докажите следующую теорему.

Теорема (транзитивность отношения параллельности)

Если две различные прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны: если $a \parallel c$ и $b \parallel c$, то $a \parallel b$.

• Дополните и обоснуйте:

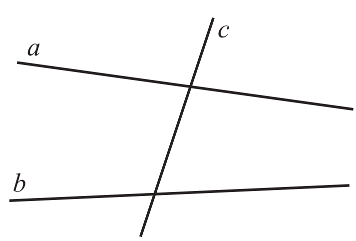
Если $a \parallel b$ и $a \cap c = \{M\}$, то прямые b и c ________.

1.2. Признаки параллельности двух прямых

1 а) Сколько углов образует прямая c с прямыми a и b?

б) Сколько конгруэнтных углов вы заметили на рисунке?

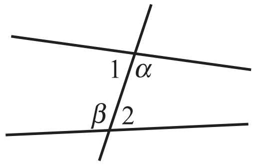
в) Сколько пар углов, дополнительных до 180°, изображено на рисунке?



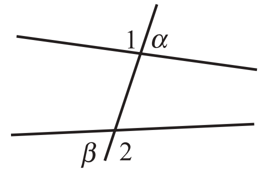
Определение. Прямая, пересекающая две различные компланарные прямые, называется **секущей**.

Прямая c, изображенная на рисунке, является секущей, так как она пересекает прямые a и b.

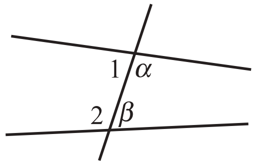
Две прямые с секущей образуют 8 углов.



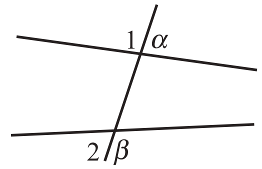
Внутренние накрест лежащие углы
$(\angle\alpha, \angle\beta)$; $(\angle 1, \angle 2)$.



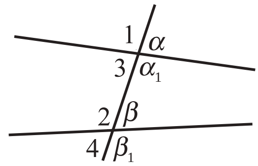
Внешние накрест лежащие углы
$(\angle\alpha, \angle\beta)$; $(\angle 1, \angle 2)$.



Внутренние односторонние углы
$(\angle\alpha, \angle\beta)$; $(\angle 1, \angle 2)$.

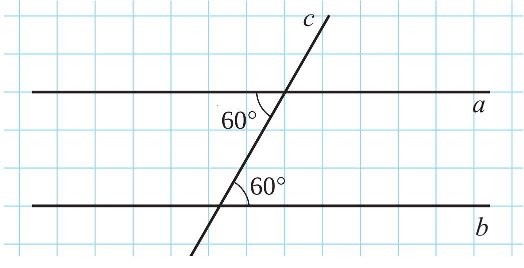


Внешние односторонние углы
$(\angle\alpha, \angle\beta)$; $(\angle 1, \angle 2)$.



Соответственные углы
$(\angle\alpha, \angle\beta)$; $(\angle\alpha_1, \angle\beta_1)$; $(\angle 1, \angle 2)$; $(\angle 3, \angle 4)$.

2 Внутренние накрест лежащие углы, изображенные на рисунке, конгруэнтны, и их величина равна 60°.



Найдите:

а) величины внешних накрест лежащих углов;

б) сумму величин внутренних односторонних углов;

в) сумму величин внешних односторонних углов;

г) величины соответственных углов.

Теорема 1

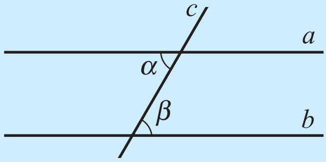
Если две прямые образуют с секущей пары конгруэнтных внутренних накрест лежащих углов, то:

1) другие два внутренних накрест лежащих угла конгруэнтны;
2) внешние накрест лежащие углы конгруэнтны;
3) внутренние односторонние углы дополнительны до 180°;
4) внешние односторонние углы дополнительны до 180°;
5) соответственные углы конгруэнтны.

Замечание. Поменяв местами условие теоремы 1 и любое утверждение в заключении теоремы 1, также получим истинное высказывание, т. е. новую теорему.

Теорема 2 (Признак параллельности прямых)

Если при пересечении прямых с секущей <u>внутренние накрест лежащие углы конгруэнтны</u>, то прямые параллельны.



$\angle\alpha \equiv \angle\beta \Rightarrow a \parallel b$

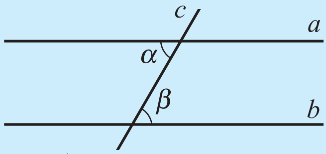
• Докажите теорему 2, применив метод от противного.

Замечания. 1. На основании теоремы 1 выделенное из теоремы 2 условие можно заменить любым из утверждений 2)–5) теоремы 1 и тем самым получить еще 4 признака параллельности двух прямых. Сформулируйте словами эти признаки.

2. Высказывания, обратные признакам параллельности прямых, также являются теоремами. Теорема 3 является обратной теореме 2. Сформулируйте обратные теоремы для других признаков.

Теорема 3 (обратная теореме 2)

Две параллельные прямые образуют с секущей конгруэнтные внутренние накрест лежащие углы.

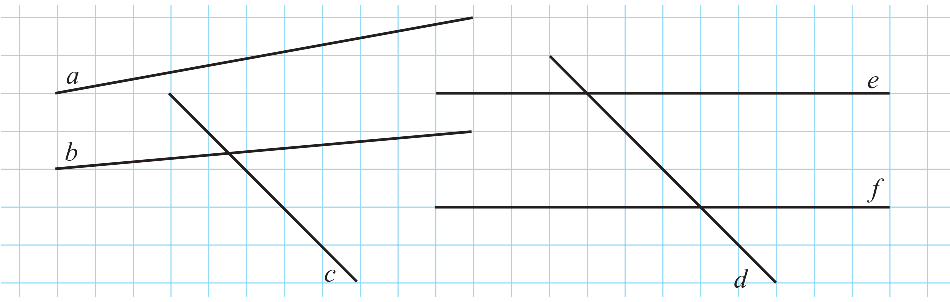


$a \parallel b \Rightarrow \angle\alpha \equiv \angle\beta$

• Даны прямая a и точка M, не принадлежащая прямой a. При помощи линейки и транспортира постройте прямую b, параллельную прямой a и проходящую через точку M.

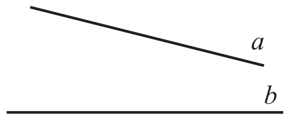
Упражнения и задачи

1. Рассмотрите рисунок и определите пары прямых:
   а) параллельных; б) пересекающихся.

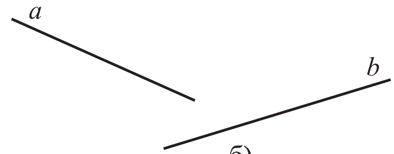


2. Постройте в тетради с помощью линейки:
   а) две горизонтальные прямые; б) две наклонные параллельные прямые;
   в) две наклонные пересекающиеся прямые.

3. Используя транспортир и угольник, найдите величину наименьшего угла, образованного при пересечении прямых a и b, изображенных на рисунке:



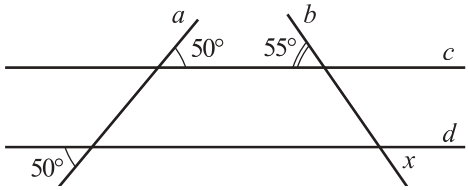
а)



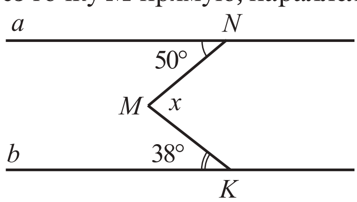
б)

4. На сколько различных частей разбивают плоскость три попарно пересекающиеся прямые?

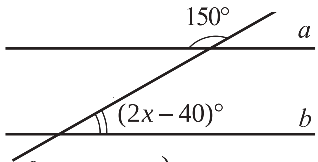
5. Рассмотрите рисунок и найдите величину угла x.



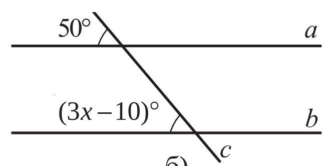
6. Прямые a и b параллельны. Найдите величину угла x.
Указание. Проведите через точку M прямую, параллельную прямым a и b.



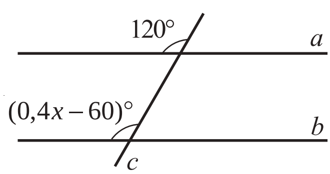
7. Прямые a и b, изображенные на рисунке, параллельны. Вычислите значение x.



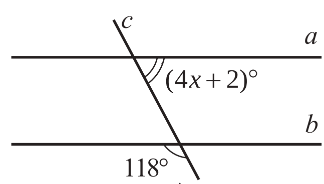
а)



б)

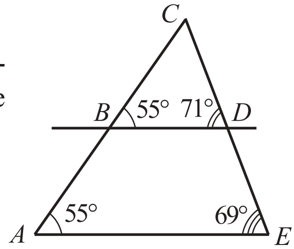


в)

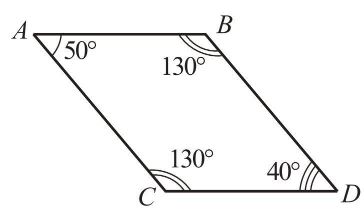


г)

8. Объясните, почему показатели значений на рисунке ошибочны?



а)

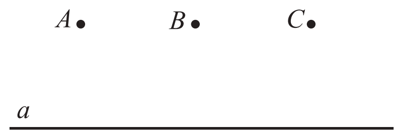


б)

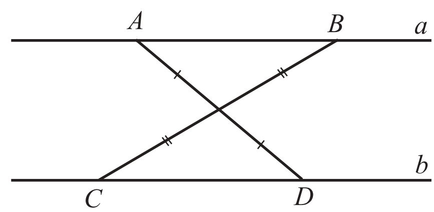
9. Даны точки $A(3; 0)$, $B(0; 2)$, $C(6; 0)$. Определите координаты точек M и N, если известно, что $MN \parallel AB$ и M, N, C – коллинеарны.

10. Сумма 6 углов из 8, образованных секущей с двумя параллельными прямыми, равна 636°. Найдите величины этих 8 углов.

11. Точки A, B, C не принадлежат прямой a, $AB \parallel a$ и $BC \parallel a$ (см. рисунок). Докажите, что точки A, B, C – коллинеарны.

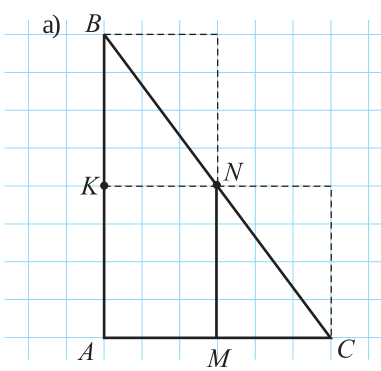


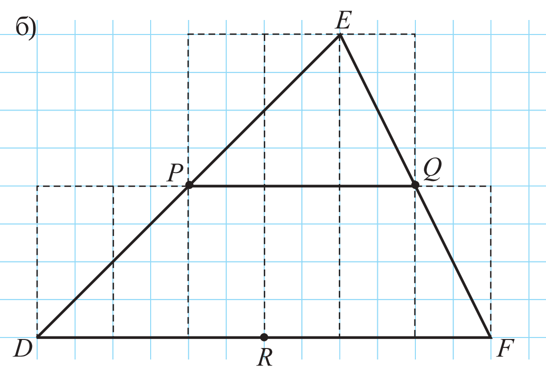
12. Докажите, что прямые a и b, изображенные на рисунке, параллельны.



§2. Средняя линия треугольника

Рассмотрите рисунок и дополните.





а) Точка M – ______ стороны AC.

Точка N – ______ стороны BC.

Прямые MN и AB – ______.

$\dfrac{AB}{MN} = $ ______.

б) Точка P – ______ стороны DE.

Точка Q – ______ стороны EF.

Прямые PQ и DF – ______.

$\dfrac{DF}{PQ} = $ ______.

Определение. Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется **средней линией** треугольника.

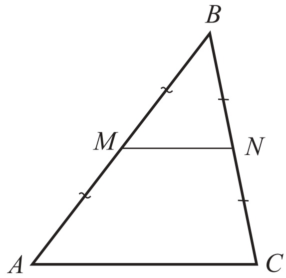
На рисунке отрезок MN – средняя линия треугольника ABC, а отрезок PQ – средняя линия треугольника DEF.

• На рисунке точка K – середина стороны AB, а точка R – середина стороны DF. Какое соотношение существует между отрезками KN и AC? А между отрезками QR и DE?

Теорема 1
Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

Докажем теорему 1.

Условие: ΔABC, $M \in [AB]$, $N \in [BC]$, отрезок [MN] – средняя линия треугольника ABC.



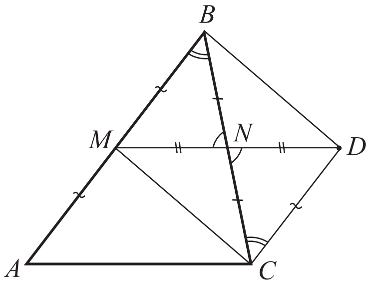
Заключение: 1) $MN \parallel AC$; 2) $AC = 2MN$.

Доказательство:

① Отметим на прямой MN точку D так, чтобы $ND = MN$.

② Рассмотрим ΔBNM и ΔCND:
$[BN] \equiv [CN]$ (по условию),
$[NM] \equiv [ND]$ (по построению),
$\angle BNM \equiv \angle CND$ (вертикальные углы).
По признаку СУС $\Delta BNM \equiv \Delta CND$.
Следовательно,
$\angle MBN \equiv \angle DCN$ и $[BM] \equiv [DC]$.

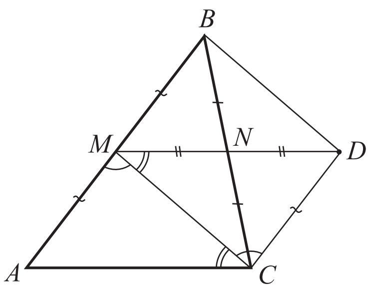
③ Рассмотрим прямые MB и CD, пересекаемые прямой BC.
Согласно признаку параллельности прямых $MB \parallel CD$ (углы MBN и DCN – конгруэнтные внутренние накрест лежащие).



①–③

④ Параллельные прямые MB и CD образуют с секущей MC конгруэнтные внутренние накрест лежащие углы AMC и DCM.

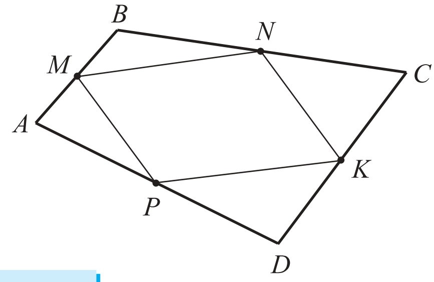
⑤ По признаку СУС, $\Delta AMC \equiv \Delta DCM$. Следовательно, $[AC] \equiv [MD]$. Так как $MD = 2MN$ и $MD = AC$, то $AC = 2MN$.
$MN \parallel AC$, так как прямые MN и AC образуют с секущей MC конгруэнтные внутренние накрест лежащие углы DMC и ACM, ч. т. д. ►



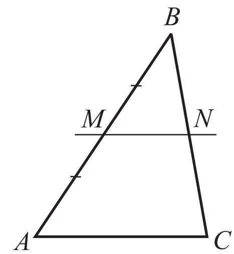
④, ⑤

• Точки M, N, K, P являются серединами сторон четырехугольника ABCD.

Применив свойство средней линии треугольника и транзитивность отношения параллельности двух прямых, докажите, что $MN \parallel PK$ и $MP \parallel NK$.



Теорема 2 (обратная теореме 1)
Прямая, проведенная через середину стороны треугольника параллельно другой стороне, проходит через середину третьей стороны.



Условие: $\Delta ABC,\ M \in [AB],\ N \in [BC],$
$AM = MB,\ MN \parallel AC.$

Заключение: $BN = NC$.

• Докажите теорему 2, применив метод от противного.

Упражнения и задачи

1. Найдите длины средних линий треугольника со сторонами:
   а) 3 см, 4 см, 5 см; б) $\frac{5}{8}$ см, $\frac{6}{7}$ см, $\frac{4}{5}$ см;
   в) $\sqrt{12}$ см, $\sqrt{10}$ см, $\sqrt{14}$ см; г) 2,(4) см, 3,(6) см, 1,(8) см.

2. Вычислите периметр треугольника, если длины средних линий треугольника равны:
   а) $4\frac{1}{3}$ см, $4\frac{4}{9}$ см, $3\frac{1}{6}$ см;
   б) $2\sqrt{3}$ см, $3\sqrt{3}$ см, $4\sqrt{3}$ см;
   в) 2,(4) см, 2,(6) см, 2,(3) см.

3. Средняя линия треугольника ABC образует со сторонами треугольника углы 45° и 60° соответственно. Найдите величины углов треугольника.

4. Отрезок MN является средней линией треугольника ABC, причем $MN \parallel AC$. Вычислите периметр треугольника BMN, если известно, что периметр треугольника ABC равен $4\sqrt{7}$ см.

5. Дана трапеция ABCD с основаниями AD и BC. Точки M и N являются серединами сторон AB и DC соответственно. Докажите, что $MN \parallel AD$ и $MN \parallel BC$.

6. Длина средней линии равнобедренного треугольника, соединяющей середины боковых сторон, равна 6 см. Найдите длины сторон треугольника, если известно, что периметр треугольника равен 40 см.

7. Средняя линия равнобедренного треугольника, не параллельная основанию, равна 5 см. Найдите длины сторон треугольника, если известно, что его периметр равен 32 см.

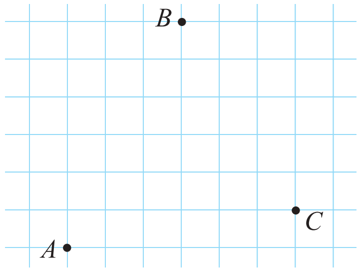
8. Точки A, B, C, D являются серединами сторон четырехугольника MNKP. Найдите длины сторон четырехугольника ABCD, если $MK = 10$ см, $NP = 12$ см.

9. Отрезок MN – средняя линия треугольника ABC, $M \in [AB]$, $N \in [BC]$. Найдите длины двух других сторон треугольника, если:
   а) $AB = 8$ см, $MN = 4{,}5$ см и периметр треугольника ABC равен 27 см;
   б) $BC = 11$ см, $MN = 5{,}4$ см и периметр треугольника ABC равен 30 см;
   в) $AB = 4\sqrt{5}$ см, $MN = 3\sqrt{5}$ см и периметр треугольника ABC равен $15\sqrt{5}$ см;
   г) $BC = 9{,}(4)$ см, $MN = 5{,}(2)$ см и периметр треугольника ABC равен 28,(6) см.

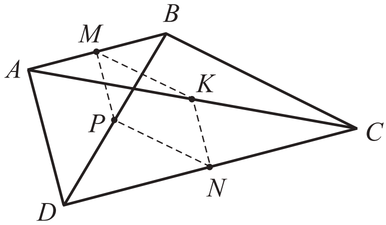
10. Длина средней линии равностороннего треугольника равна 3,(7) см. Найдите периметр треугольника.

11. Точки M, N, K являются серединами сторон треугольника ABC. Найдите периметр треугольника, если $MN + MK = 9{,}3$ см, $MN + NK = 10{,}1$ см, $MK + NK = 9{,}8$ см.

12. Докажите, что средние линии треугольника делят его на четыре конгруэнтных треугольника.



13. Точки A, B, C, изображенные на рисунке, являются серединами сторон треугольника MNK. Перечертите рисунок и „восстановите" треугольник MNK с помощью линейки и угольника.

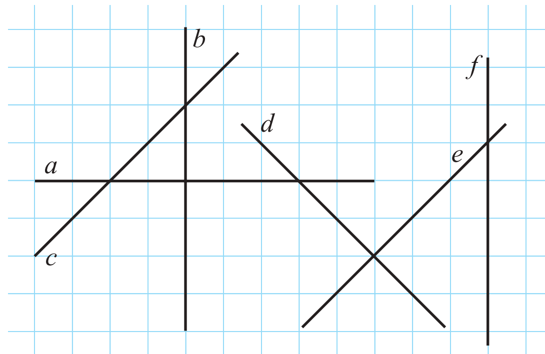


14. Рассмотрите рисунок. M и N – середины сторон AB и CD, а P и K – середины диагоналей BD и AC четырехугольника ABCD. Докажите, что $MP \parallel KN$ и $MK \parallel PN$.

§ 3. Перпендикулярные прямые. Медиатрисса отрезка

3.1. Перпендикулярные прямые. Расстояние от точки до прямой

1 Рассмотрите рисунок. Укажите пары перпендикулярных прямых.

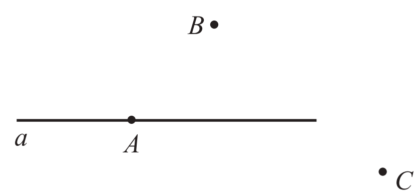


• Каково взаимное расположение прямых x и y, если каждая из них перпендикулярна прямой z?

2 Можно ли с помощью линейки и угольника построить перпендикулярно прямой a, изображенной на рисунке, прямую, которой принадлежит:

а) точка A;
б) точка B;
в) точка C?

Обоснуйте.



• Какие прямые называются перпендикулярными?
• Как с помощью математических символов записать фразу: „Прямые a и b перпендикулярны“?

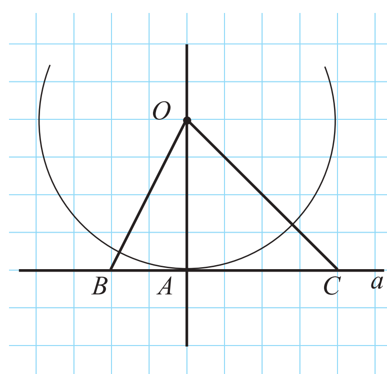
Теорема
Через любую точку, принадлежащую прямой или не принадлежащую ей, можно провести единственную прямую перпендикулярную данной.

3 Рассмотрите рисунок и дополните.

Прямая OA перпендикулярна прямой ___ .

Расположив в порядке возрастания длины отрезков OA, OB, OC, получим: ___ $< OB <$ ___ .

Согласно определению расстояния между двумя фигурами заметим, что расстояние между точкой O и прямой a равно длине отрезка ___ .



Определения. ♦ Точка, в которой перпендикуляр, проведенный из точки O к прямой a, пересекает прямую a, называется **основанием перпендикуляра**, проведенного из точки O к прямой a, или **ортогональной проекцией точки** O на прямую a.

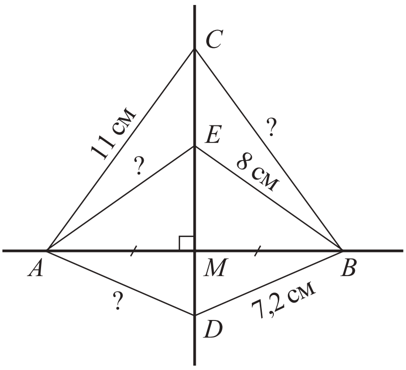
♦ Прямая, определенная точкой O и любой точкой прямой a, отличной от ортогональной проекции точки O на прямую a, называется **наклонной**.

♦ **Расстоянием от точки** O **до прямой** a называется длина отрезка, определенного точкой O и ее ортогональной проекцией на прямую a.

На рисунке задачи **3** точка A является ортогональной проекцией точки O на прямую a, прямые OB и OC являются наклонными, а отрезок OA – это расстояние от точки O до прямой a.

3.2. Медиатрисса отрезка

1 Прямые AB и CD, изображенные на рисунке, перпендикулярны, а точка M – середина отрезка AB.
Укажите пары конгруэнтных прямоугольных треугольников.
Найдите длины отрезков BC, AE и AD.
Сформулируйте вывод.



Определение. **Медиатриссой отрезка** называется прямая, проходящая через середину отрезка и перпендикулярная к данному отрезку.

На рисунке прямая CD является медиатриссой отрезка AB.

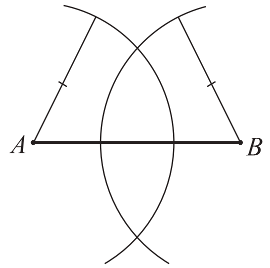
Теорема
Точки, принадлежащие медиатриссе отрезка, равноудалены от концов этого отрезка.

• Также верно высказывание, обратное данной теореме. Сформулируйте обратную теорему и докажите истинность теорем.

Замечание. Согласно теореме о точках медиатриссы отрезка и обратной теореме точка равноудалена от концов отрезка, если и только если она принадлежит медиатриссе отрезка.

2 Как с помощью линейки и циркуля построить медиатриссу отрезка?

Объясняем

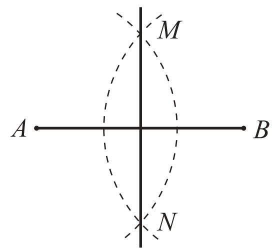


Пусть задан отрезок AB.

① Зафиксируем ножку циркуля в точке A и построим полуокружность радиусом больше $\frac{AB}{2}$.

② Сохраняя раствор циркуля, фиксируем его ножку в точке B и строим вторую полуокружность.

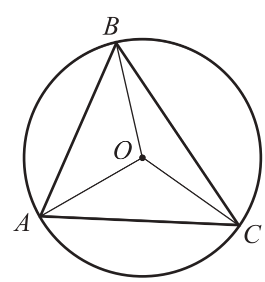
③ Точки пересечения полуокружностей определяют медиатриссу отрезка AB.



• Докажите, что прямая MN, построенная таким образом, является медиатриссой отрезка AB.

• Почему радиус полуокружностей должен быть больше $\frac{AB}{2}$?

3 Рассмотрите рисунок. Как расположен центр O окружности относительно точек A и B? А относительно A и C? B и C?
Сформулируйте вывод.



Объясняем

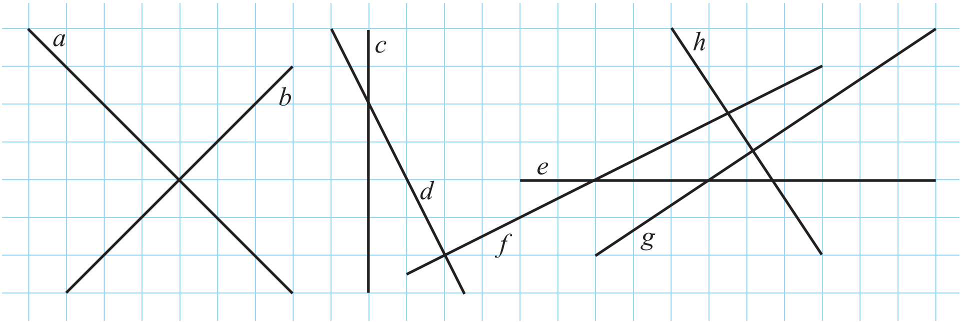
Точка O равноудалена от точек A и B, так как AO и OB являются ______ окружности. Следовательно, точка O принадлежит ______ отрезка AB.

То же самое можно сказать и о расположении точки O относительно точек A и C (соответственно B и C).

Медиатриссы сторон треугольника пересекаются в одной точке.
Точка пересечения медиатрисс равноудалена от вершин треугольника.

Упражнения и задачи

1. Рассмотрите рисунок и соответствующими инструментами определите пары перпендикулярных прямых.



2. Точка M принадлежит медиатриссе отрезка AB. Найдите:

а) AM, если $BM = 8$ см; б) BM, если $AM = \sqrt{10}$ см;

в) AM, если $AM + BM = 21$ см; г) BM, если $3AM = 17$ см.

3. Точка M_1 является ортогональной проекцией точки M (a, b) на ось абсцисс прямоугольной системы координат. Найдите координаты точки M_1, если:

а) $a = \sqrt{3},\ b = -\dfrac{5}{12}$; б) $a = \dfrac{1}{9},\ b = -\dfrac{1}{5}$;

в) $a = 2,(5),\ b = 1,(4)$; г) $a = 0,\ b = -2$.

4. Точка M_1 является ортогональной проекцией точки M(a, b) на ось ординат прямоугольной системы координат. Найдите MM_1, если:

а) $a = 3,\ b = -7$; б) $a = -2,\ b = \sqrt{5}$;

в) $a = b = -3,(4)$; г) $a = -5,\ b = 0$.

5. Точки A_1 и B_1 являются ортогональными проекциями точек A и B соответственно на прямую a (точки расположены в разных полуплоскостях относительно прямой *a*), $[AA_1] \equiv [BB_1]$. Найдите:

а) AB_1, если $A_1B = 7$ см; б) $m(\angle A_1AB_1)$, если $m(\angle B_1A_1B) = 30°$.

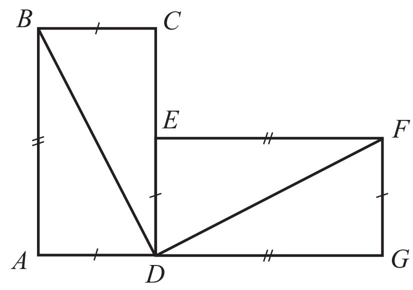
6. Точки A_1 и B_1 являются ортогональными проекциями точек A и B соответственно на прямую a (точки расположены в одной полуплоскости относительно прямой *a*), $[AA_1] \equiv [BB_1]$, точка M – середина отрезка A_1B_1. Найдите:

а) $m(\angle A_1AM)$, если $m(\angle BMB_1) = 50°$; б) $m(\angle AMB)$, если $m(\angle BMB_1) = 40°$.

7. Точка D – середина стороны BC треугольника ABC, $E \in AD$, $[BE] \equiv [CE]$. Найдите:

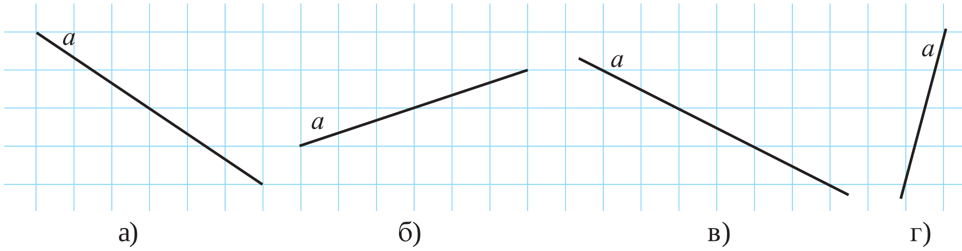
а) $m(\angle BED)$, если $m(\angle DCE) = 42°$; б) $m(\angle CAD)$, если $m(\angle ABC) = 35°$.

8. Сколько пар перпендикулярных прямых можно провести через три неколлинеарные точки?



9. Изображенные на рисунке прямоугольники ABCD и DEFG – конгруэнтны. Докажите, что $m(\angle BDF) = 90°$.

10. Перечертите рисунок, используя результат упражнения 9. Постройте, пользуясь лишь линейкой, прямую перпендикулярно прямой a:



11. Даны точки A(1; 2), B(5; 6), C(5; 2) в прямоугольной системе координат. Найдите координаты:

а) ортогональной проекции точки C на прямую AB;

б) ортогональной проекции точки B на прямую AC;

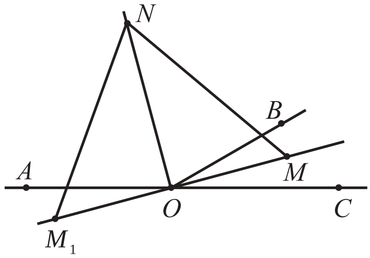
в) ортогональной проекции точки A на прямую BC.

12. Точки A, O, C – коллинеарны (см. рисунок), $[OM$ – биссектриса угла BOC, а $[ON$ – биссектриса угла AOB, $M_1 \in OM$, $[M_1O] \equiv [OM]$.

Найдите:

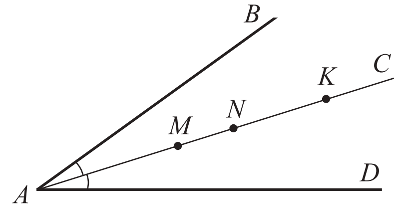
а) $m(\angle ONM_1)$, если $m(\angle OMN) = 55°$;

б) ON, если OM = 5 см и периметр треугольника M_1NM равен 24 см, а периметр треугольника MON равен 18 см.



§4. Свойства биссектрисы угла

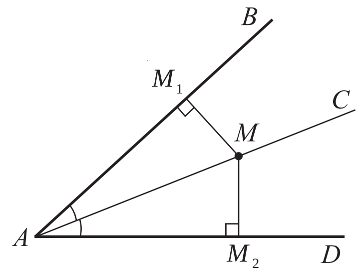
1 Рассмотрите рисунок. Полупрямая $[AC$ – биссектриса угла BAD. С помощью угольника и линейки с делениями найдите расстояние от точек M, N, K до сторон треугольника BAD.



• Что вы заметили?

Теорема 1
Любая точка биссектрисы угла равноудалена от сторон этого угла.

Докажем теорему 1.



Условие: ΔBAD, $\angle BAC \equiv \angle CAD$,
$MM_1 \perp AB$, $MM_2 \perp AD$,
$M_1 \in [AB$, $M_2 \in [AD$.

Заключение: $MM_1 = MM_2$

Доказательство:

① $\Delta AM_1M \equiv \Delta AM_2M$ (признак ГУ).

② Следовательно, $[MM_1] \equiv [MM_2]$, то есть $MM_1 = MM_2$, ч. т. д. ►

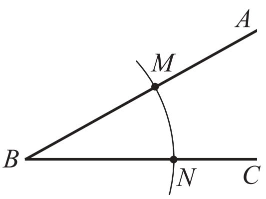
Теорема 2 (обратная теореме 1)
Если точка, лежащая между сторонами угла, равноудалена от сторон этого угла, то эта точка принадлежит биссектрисе угла.

• Докажите теорему 2.

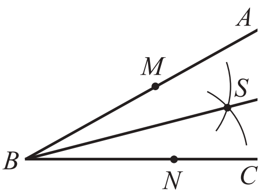
2 Как можно построить биссектрису заданного угла ABC с помощью линейки и циркуля?

Объясняем

① Зафиксируем ножку циркуля в вершине угла и построим окружность.
Пусть M и N – точки пересечения окружности со сторонами угла ABC.



② Зафиксируем ножку циркуля в точке M и построим окружность радиуса больше $\frac{MN}{2}$. Затем построим окружность того же радиуса с центром в точке N. Пусть S – точка пересечения этих двух окружностей (заключенная между сторонами угла).

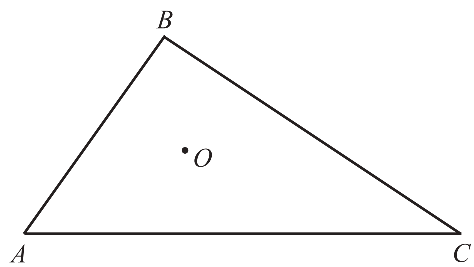


③ Полупрямая $[BS$ – биссектриса угла ABC.

• Учитывая, что углы при основании равнобедренного треугольника конгруэнтны (это свойство будет доказано позже), применив признаки конгруэнтности и теорему 2, докажите, что полупрямая [BS действительно является биссектрисой угла ABC.

• Почему радиус двух окружностей, построенных в пункте ②, должен быть больше $\frac{MN}{2}$?

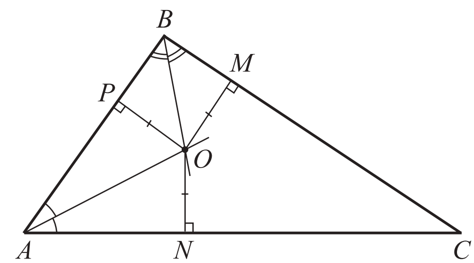
3 Как найти такую точку O во внутренней области треугольника, чтобы она была равноудалена от всех сторон треугольника?



Объясняем

① Так как точка O равноудалена от сторон AB и AC, то она принадлежит биссектрисе угла A.

② Аналогично делаем вывод, что точка O одновременно принадлежит биссектрисам углов B и C.
Следовательно, точка O принадлежит всем биссектрисам треугольника.

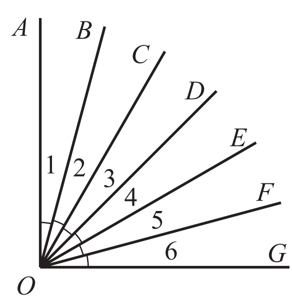


③ Достаточно построить биссектрисы двух углов треугольника. Точка их пересечения и будет искомой точкой.

Биссектрисы углов треугольника пересекаются в точке, равноудаленной от сторон треугольника.

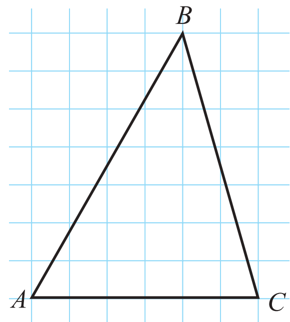
Упражнения и задачи

1. Изображенные на рисунке углы 1–6 – конгруэнтны. Перечертите и заполните:
а) Полупрямая $[CO$ – биссектриса углов...
б) Биссектрисой угла AOG является...
в) $\angle AOC \equiv ...,\quad \angle DOG \equiv ...$
г) Если $m(\angle AOG) = 90°$, то
$m(\angle BOD) = ...$



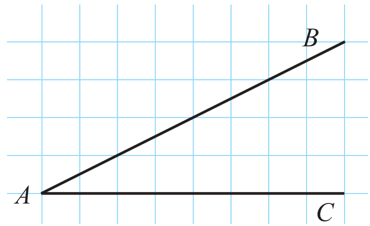
2. Точка X принадлежит биссектрисе угла AOB. Найдите расстояние от точки X до полупрямой $[OB$, если расстояние от точки X до полупрямой $[OA$ равно:
а) $\sqrt{5}$ см; б) 3,6 см; в) $|\sqrt{3}-2|$ см; г) 0,4 см.

3. Точка M равноудалена от сторон угла AOB и принадлежит внутренней области этого угла. Найдите $m(\angle AOM)$, если:
   а) $m(\angle BOM) = 35°$;
   б) $m(\angle AOB) = 80°$;
   в) $m(\angle BOM) = 40°26'$;
   г) $m(\angle AOB) = 17°$.

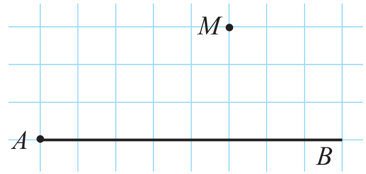


4. Перечертите рисунок и с помощью линейки и циркуля постройте биссектрису треугольника ABC, проведенную из вершины:
   а) A; б) B; в) C.

5. Точка M принадлежит биссектрисе угла AOB, а точки M_1 и M_2 – ортогональные проекции точки M на стороны угла AOB. Найдите:
   а) $m(\angle M_1OM)$, если $m(\angle OMM_2) = 42°$;
   б) $m(\angle OMM_2)$, если $m(\angle AOB) = 70°$;
   в) $m(\angle AOB)$, если $m(\angle OMM_1) = 65°$;
   г) $m(\angle AOB)$, если $m(\angle M_1MM_2) = 160°$.



6. Перечертите рисунок и с помощью линейки и циркуля постройте полупрямую $[AD$, такую, чтобы полупрямая $[AB$ являлась биссектрисой угла CAD.



7. Перечертите рисунок и с помощью линейки и циркуля постройте полупрямую $[AC$, такую, чтобы точка M была равноудалена от полупрямых $[AB$ и $[AC$.

8. Полупрямая $[OA$ противоположна биссектрисе угла BOC. Найдите:
   а) $m(\angle AOB)$, если $m(\angle BOC) = 60°$;
   б) $m(\angle BOC)$, если $m(\angle AOC) = 165°$.

9. Отрезок AD – биссектриса треугольника ABC и $E \in [AC]$ так, что $[AE] \equiv [AB]$. Докажите, что $BD = DE$.

10. Дан треугольник ABC, у которого $[AB] \equiv [BC]$ и [AD] – биссектриса треугольника. Найдите:
   а) $m(\angle CAD)$, если $m(\angle B) = 20°$;
   б) $m(\angle B)$, если $m(\angle BAD) = 25°$.

11. Точка M равноудалена от сторон равностороннего треугольника ABC. Найдите $m(\angle AOB)$.

12. Полупрямая $[BE$ является биссектрисой углов ABC и ADC (см. рисунок 1). Докажите, что треугольники ABC и ADC – равнобедренные.

13. Рассмотрите рисунок 2.
Докажите, что $AC \perp M_1M_2$.

14. Точка O – центр окружности, вписанной в равносторонний треугольник ABC (см. рисунок 3) и $M \in [AB]$, $N \in [BC]$, $K \in [AC]$ так, что $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OK \perp AC$. Найдите:
а) $m(\angle MON)$;
б) периметр треугольника MNK, если $AC = 10$ см.

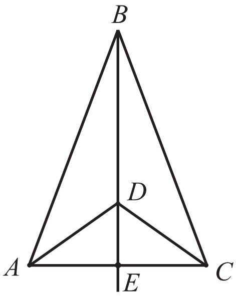


Рис. 1

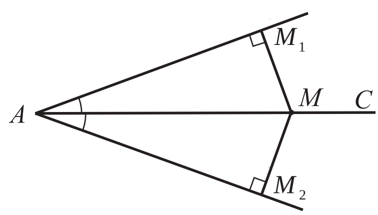


Рис. 2

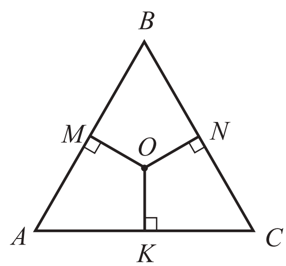
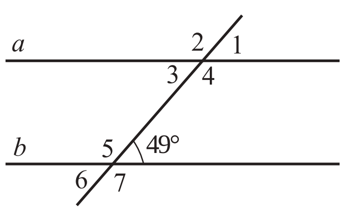


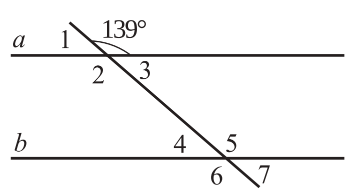
Рис. 3

Упражнения и задачи на повторение

1. Прямые a и b – параллельны. Найдите величины углов 1–7.



а)



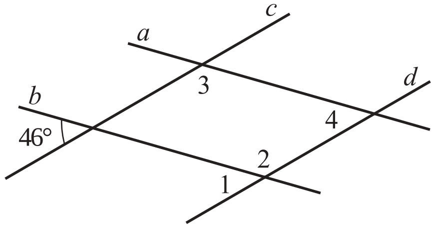
б)

2. Найдите величину угла между биссектрисами внутренних односторонних углов, образованных двумя параллельными прямыми и секущей.

3. При пересечении двух параллельных прямых секущей величина одного из образованных внутренних односторонних углов на 50° больше другого. Найдите величину меньшего угла.

4. Точки A и D расположены в одной полуплоскости относительно прямой BC, $m(\angle ABC) = \alpha$, а $m(\angle BCD) = \beta$. Каково взаимное расположение прямых AB и CD, если:
а) $\alpha = 70°$, $\beta = 110°$; б) $\alpha = 65°$, $\beta = 115°$?

5. Разность величин двух внутренних односторонних углов (образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей) в 4 раза меньше их суммы. Найдите величину большего угла.

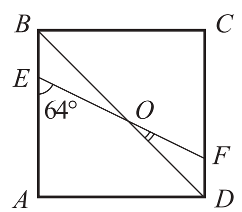


6. Рассмотрите рисунок. Найдите величины углов 1–4, если $a \parallel b$ и $c \parallel d$.

7. Дан прямоугольный треугольник ABC, у которого $m(\angle B) = 90°$. Расстояние между серединой гипотенузы и одним из катетов треугольника равно 7,5 см. Найдите длину другого катета.

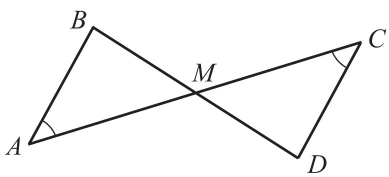
8. Точка M равноудалена от сторон угла ABC. Найдите величину угла ABM, если величина угла ABC равна 111°.

9. Точка M равноудалена от концов отрезка AB. Найдите $m(\angle MAB)$, если $m(\angle AMB) = 71°$.

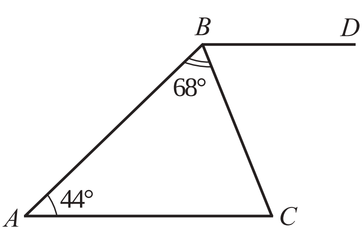


10. Рассмотрите рисунок. ABCD является квадратом. Найдите $m(\angle DOF)$, если $m(\angle AEO) = 64°$.

11. Две медианы треугольника конгруэнтны. Докажите, что треугольник – равнобедренный.

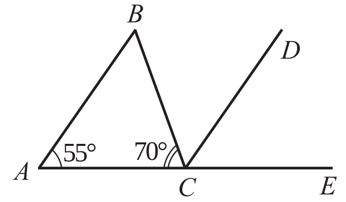


12. Рассмотрите рисунок. Докажите, что $AB \parallel CD$.



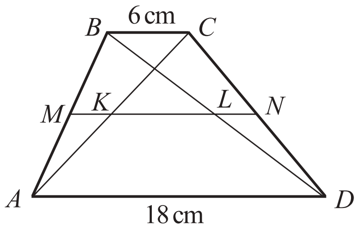
13. Рассмотрите рисунок. Полупрямая $[BC$ является биссектрисой угла ABD. Докажите, что $AC \parallel BD$.

14. Рассмотрите рисунок. Полупрямая $[CD$ является биссектрисой угла BCE. Докажите, что $AB \parallel CD$.



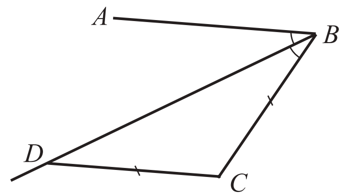
15. Дана трапеция ABCD, у которой $AD \parallel BC$. Точки M и N – середины боковых сторон трапеции. Найдите MN, если AD = 12 см и BC = 4,8 см.

16. Дана трапеция ABCD, у которой $AD \parallel BC$ и AD = 18 см, BC = 6 см (см. рисунок). Точки M и N – середины сторон AB и CD соответственно, $MN \cap AC = \{K\}$, $BD \cap MN = \{L\}$. Найдите MK, KL, LN.



17. Точка пересечения отрезков AB и CD делит их пополам. Докажите, что, если прямая a параллельна прямой AC, то прямая a параллельна и прямой BD.

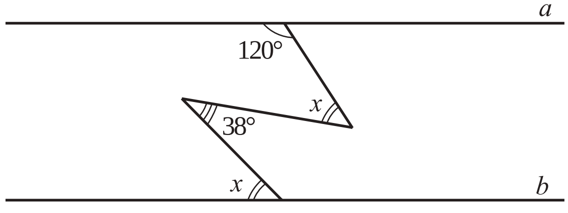
18. Рассмотрите рисунок. Полупрямая $[BD$ является биссектрисой треугольника ABC и $[BC] \equiv [CD]$. Докажите, что $AB \parallel CD$.
Указание. Проведите медиану CN треугольника BDC и докажите, что треугольники CNB и CND – конгруэнтны.



19. Докажите, что углы, у которых стороны соответственно параллельны, являются конгруэнтными или дополнительными до 180°.

ЗАДАЧА ДЛЯ ЧЕМПИОНОВ

20. Найдите величину угла x, если прямые a и b – параллельны.



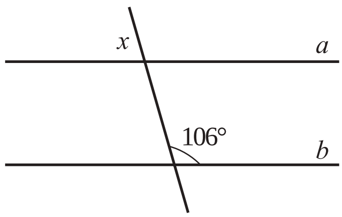
Проверочная работа

Время выполнения работы: 45 минут

1 вариант

1 б

1. Прямые a и b параллельны.
   Вычислите величину угла x:



2 б

2. Разность величин внутренних односторонних углов равна 36°.
   Найдите величину большего угла.

2 б

3. Найдите периметр треугольника ABC, если периметр треугольника MNK, где точки M, N, K – середины сторон треугольника ABC, равен 22,2 см.

2 б

4. Найдите величину угла, образованного полупрямой, противоположной биссектрисе угла A, и стороной этого угла, если:

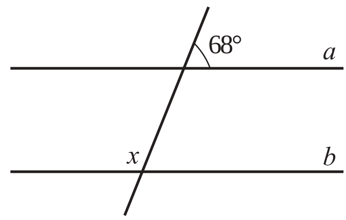
$$m(\angle A) = 88^\circ.$$

3 б

5. Даны точки A, B, C в прямоугольной системе координат. Найдите координаты точки C, если она принадлежит медиатриссе отрезка AB, где A(–3, 4), B(5, 4), имеет положительную ординату и расположена на расстоянии 6 единиц от отрезка AB.

2 вариант

1. Прямые a и b параллельны.
   Вычислите величину угла x:



2. Разность величин внутренних односторонних углов равна 34°.
   Найдите величину меньшего угла.

3. Найдите периметр треугольника ABC, если периметр треугольника MNK, где точки A, B, C – середины сторон треугольника MNK, равен 19,1 см.

4. Найдите величину угла, образованного полупрямой, противоположной биссектрисе угла A, и стороной этого угла, если:

$$m(\angle A) = 76^\circ.$$

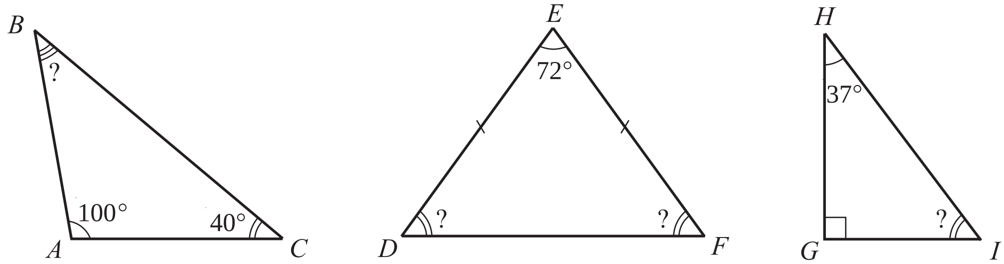
5. Даны точки A, B, C в прямоугольной системе координат. Найдите координаты точки C, если она принадлежит медиатриссе отрезка AB, где A(2, 3), B(2, –2), имеет положительную ординату и расположена на расстоянии 5 единиц от отрезка AB.

ГЛАВА

4 Свойства треугольников

§1. Внешний угол треугольника

1 Рассмотрите рисунок и вычислите величины неизвестных углов треугольника.



Объясняем

Так как сумма углов любого треугольника равна 180°, получим:

$m(\angle B) = 180° - m(\angle A) - m(\angle C) = 180° - 100° - \square° = \square°.$

$m(\angle D) = m(\angle F) = \dfrac{180° - \square°}{2} = \square°.$

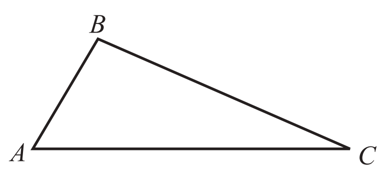
$m(\angle I) = 180° - \square° - \square° = \square°.$

До сих пор мы применяли свойство углов треугольника без его доказательства. Докажем это свойство.

Теорема 1

Сумма углов треугольника равна 180°.

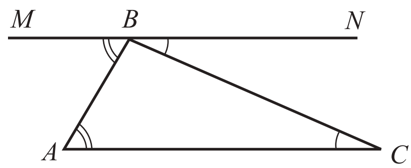
Условие: ABC – треугольник.



Заключение: $m(\angle A) + m(\angle B) + m(\angle C) = 180°.$

Доказательство:

① Проведем через точку B прямую MN, параллельную прямой AC.



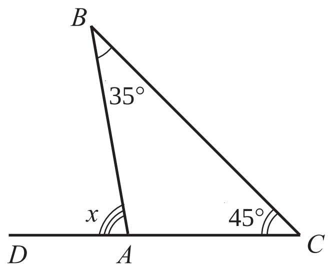
② $\angle C \equiv \angle CBN$, $\angle A \equiv \angle ABM$ (внутренние накрест лежащие углы, образованные секущими BC, A*B* и параллельными прямыми MN и AC).

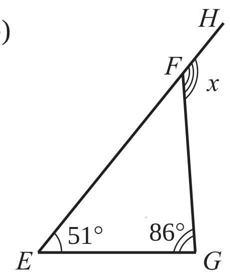
③ $m(\angle MBN)=180°$ (развернутый угол).

④ $m(\angle A)+m(\angle B)+m(\angle C)\overset{②}{=}m(\angle ABM)+m(\angle B)+m(\angle CBN)=$

$=m(\angle MBN)\overset{③}{=}180°$, ч.т.д. ►

2 Найдите величину угла, обозначенную через x:

а) 

б) 

Объясняем

а) Углы BAD и BAC – смежные и дополнительные до 180°:

$m(\angle BAD)=180°-m(\angle BAC);$ (1)

$m(\angle BAC)\overset{T_1}{=}180°-m(\angle B)-m(\angle C).$ (2)

Подставляя соотношение (2) в (1), получим:

$m(\angle BAD)=180°-[180°-m(\angle B)-m(\angle C)]=$ ☐

$m(\angle BAD)=$ ☐° + ☐° = ☐°.

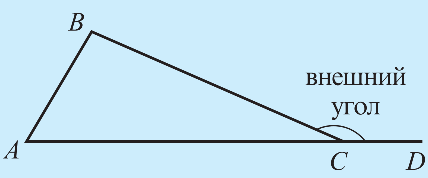
б) $m(\angle HFG)=180°-m(\angle EFG),$ (1)

$m(\angle EFG)=180°-$ ☐° – ☐°. (2)

Подставляя соотношение (2) в (1), получим:

$m(\angle HFG)=$ ☐° + ☐° = ☐°.

Определение. **Внешним углом** треугольника при данной вершине называется угол, смежный углу треугольника при этой вершине.



Теорема 2

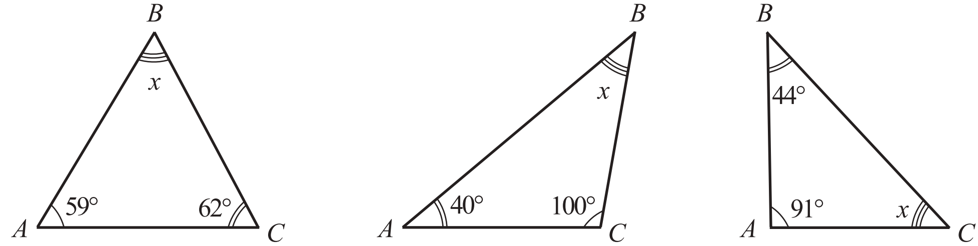
Величина внешнего угла треугольника равна сумме величин двух углов треугольника, не смежных с ним.

$$m(\angle BCD)=m(\angle A)+m(\angle B).$$

• Докажите теорему 2.

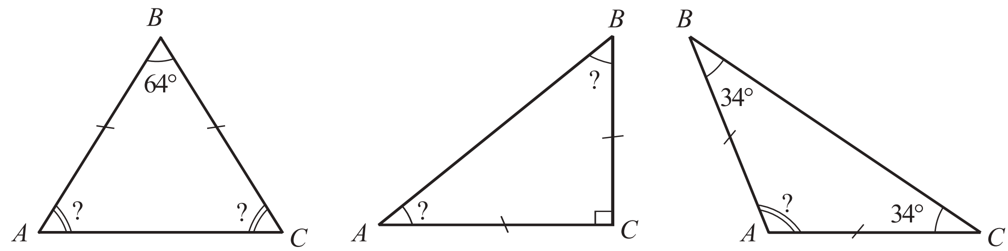
Упражнения и задачи

1. Рассмотрите рисунок и найдите величину угла, обозначенную через x.



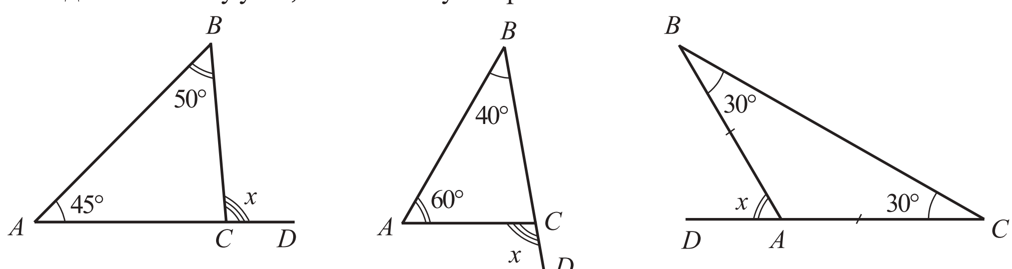
а) б) в)

2. Рассмотрите рисунок и вычислите величины неизвестных углов треугольника ABC.



а) б) в)

3. Найдите величину угла, обозначенную через x:



а) б) в)

4. Вычислите величины внешних углов равностороннего треугольника.

5. Вычислите величины внешних углов равнобедренного прямоугольного треугольника.

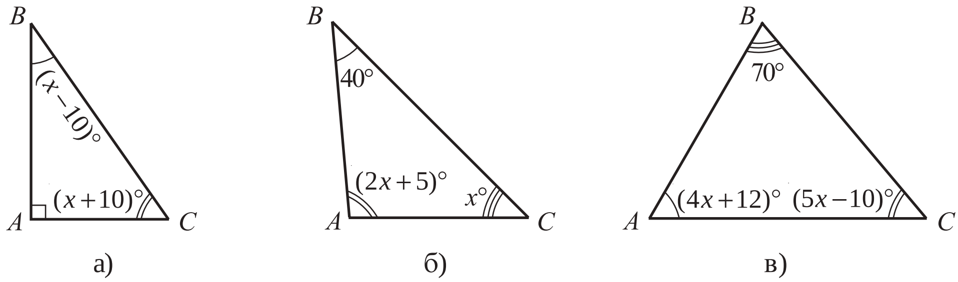
6. Вычислите величины внешних углов прямоугольного треугольника, один из острых углов которого равен 20°.

7. Чему равна сумма внешних углов любого треугольника?

8. Величины внешних углов треугольника равны 100°, 110°, 150°. Найдите величины углов треугольника.

9. Величины двух внешних углов треугольника равны 95° и 130° соответственно. Найдите величины углов треугольника.

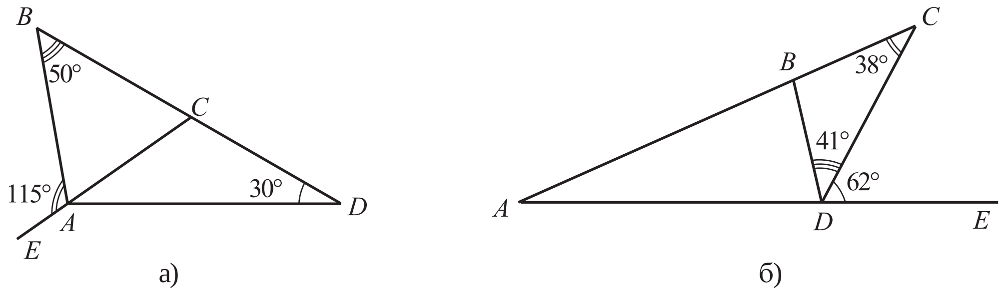
10. Рассмотрите рисунок и вычислите величины неизвестных углов треугольника ABC.



11. Величина одного из углов равнобедренного треугольника равна 92°. Найдите величины двух других углов.

12. Найдите величины углов треугольника, если они прямо пропорциональны числам 2, 3, 4.

13. Рассмотрите рисунок и найдите величину угла CAD.



14. Найдите величины углов треугольника, если величины внешних углов треугольника прямо пропорциональны числам 3, 4, 5.

15. Докажите, что не существует треугольника, у которого все возможные суммы любых двух углов:
а) больше 120°; б) меньше 120°.

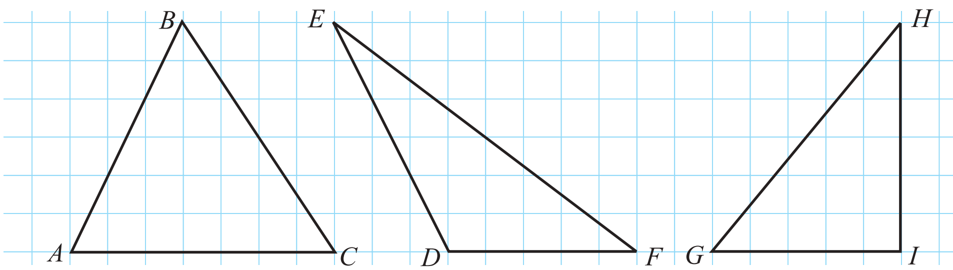
16. Величины углов треугольника прямо пропорциональны трем последовательным натуральным числам. Докажите, что величина одного из углов равна 60°.

Указание: Используйте свойство $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$.

§ 2. Свойства замечательных линий треугольника

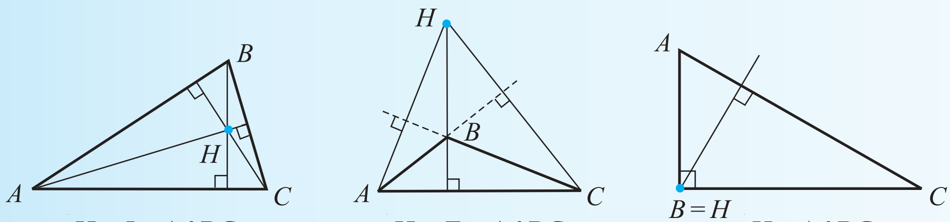
1 Дополните так, чтобы получить истинное высказывание.
а) Точка пересечения медиатрисс сторон треугольника равноудалена от ... .
б) Точка пересечения биссектрис треугольника равноудалена от ... .

2 Перечертите и проведите высоты в каждом треугольнике.



• Обратите внимание, как зависит от вида треугольника расположение точек пересечения несущих прямых высот треугольника. Сформулируйте гипотезы и проверьте их на других треугольниках такого же вида (остроугольных, тупоугольных, прямоугольных).

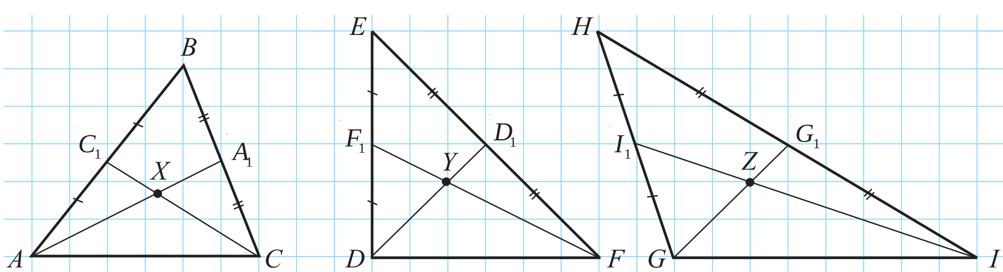
Несущие прямые высот треугольника пересекаются в одной точке, которая называется **ортоцентром** треугольника (как правило, обозначается через H).



$H \in \mathrm{Int}\,\Delta ABC$ $\quad$ $H \in \mathrm{Ext}\,\Delta ABC$ $\quad$ $H \in \Delta ABC$

Практическая работа

Рассмотрите рисунок. Линейкой определите, будет ли третья медиана треугольника проходить через точку пересечения двух построенных медиан. Сформулируйте вывод.

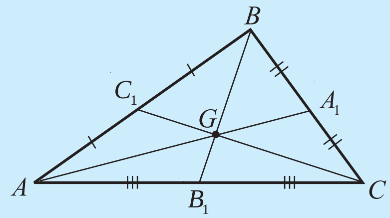


• Точка пересечения медиан делит каждую медиану на два отрезка. Циркулем определите, во сколько раз меньший отрезок короче большего отрезка. Сформулируйте вывод.

Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая называется **центром тяжести** треугольника (как правило, обозначается через G).

Теорема

Центр тяжести треугольника расположен на каждой медиане в два раза дальше от вершины треугольника, чем от середины противоположной стороны.



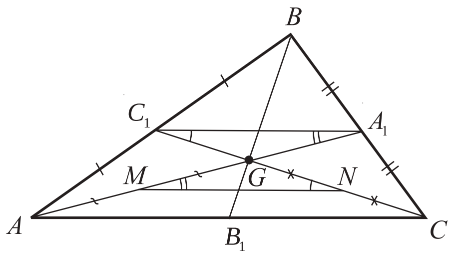
Докажем теорему.

Условие: ΔABC, $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ – медианы треугольника ABC.

$[AA_1]\cap[BB_1]\cap[CC_1]=\{G\}$.

Заключение: $AG=2A_1G,\ BG=2B_1G,\ CG=2C_1G$.

Доказательство:



① Пусть точка M – середина отрезка AG, а точка N – середина отрезка CG.

② Отрезок $[A_1C_1]$ – средняя линия треугольника ABC. Значит, $A_1C_1 \parallel AC$ и $A_1C_1=\dfrac{AC}{2}$ (1).

Отрезок $[MN]$ – средняя линия треугольника AGC.

Значит, $MN \parallel AC$ и $MN=\dfrac{AC}{2}$ (2).

③ Из соотношений (1) и (2) следует, что $[MN]\equiv[A_1C_1]$ и $MN \parallel A_1C_1$ (3).

④ $\angle MNG \equiv \angle A_1C_1G$ (внутренние накрест лежащие углы, образованные секущей NC_1 и параллельными прямыми MN и A_1C_1) (4).

⑤ $\angle NMG \equiv \angle C_1A_1G$, (внутренние накрест лежащие углы, образованные секущей MA_1 и параллельными прямыми MN и A_1C_1) (5).

⑥ Из сотношений (3)–(5) следует, что $\Delta A_1C_1G \equiv \Delta MNG$ (УСУ).

Следовательно, $[A_1G]\equiv[MG] \Rightarrow AG=2A_1G$,

$[C_1G]\equiv[NG] \Rightarrow CG=2C_1G$.

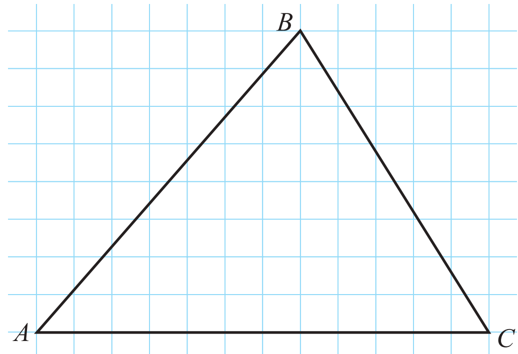
Аналогично доказывают, что $BG=2B_1G$, ч. т. д. ►

Замечание. Теорему можно сформулировать и так:

Точка пересечения медиатрисс треугольника делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.

Упражнения и задачи

1. Перечертите рисунок и проведите в треугольнике:
   а) медианы;
   б) высоты;
   в) биссектрисы.



2. *Истинно* или *ложно*?

   а) Центр тяжести треугольника является точкой пересечения его биссектрис.
   б) Медианы треугольника пересекаются в точке, являющейся центром окружности, описанной около этого треугольника.
   в) Биссектрисы треугольника пересекаются в точке, являющейся центром окружности, вписанной в этот треугольник.
   г) Ортоцентр треугольника является точкой пересечения медиатрисс треугольника.

3. Исправьте ложные высказывания упражнения 2.

4. Дополните так, чтобы получить истинные высказывания.
   а) Ортоцентр ______ треугольника расположен во внешней области этого треугольника.
   б) Если точка G – центр тяжести треугольника ABC и $[AA_1]$ – медиана этого треугольника, то $\frac{AA_1}{A_1G} = \boxed{}$, $\frac{AA_1}{AG} = \boxed{}$.
   в) Если диаметр окружности, содержащей вершины треугольника, равен 10 см, то расстояние от вершины треугольника до точки пересечения медиатрисс треугольника равно ____ см.

5. Определите вид треугольника, если точка пересечения медиатрисс принадлежит:
   а) треугольнику;
   б) внутренней области треугольника;
   в) внешней области треугольника.

6. Длина гипотенузы прямоугольного треугольника равна 6 см. Найдите радиус окружности, содержащей вершины этого треугольника.

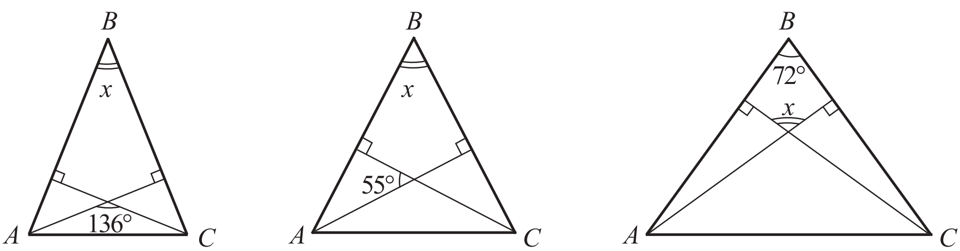
7. Медианы AM и BN треугольника ABC пересекаются в точке O. Вычислите:
а) AO и BO, если $AM = 9$ см, $BN = 12$ см;
б) AM и BN, если $AO = 4\sqrt{3}$ см, $BO = 6\sqrt{3}$ см;
в) OM и ON, если $AM = 12$ см, $BN = 15$ см;
г) AO и BO, если $OM = \sqrt{5}$ см, $ON = \sqrt{6}$ см.

8. Точка M равноудалена от сторон треугольника ABC. Найдите:
а) величины углов треугольника ABC, если $m(\angle MAC) = 30°$, $m(\angle ACM) = 40°$;
б) $m(\angle BAM)$ и $m(\angle BCM)$, если $m(\angle BAC) = 74°$, $m(\angle ABC) = 70°$;
в) $m(\angle AMC)$ и $m(\angle BMC)$, если $m(\angle BAC) = 46°$, $m(\angle ABC) = 100°$;
г) величины углов треугольника ABC, если $m(\angle AMB) = 100°$, $m(\angle BMC) = 130°$.

9. Отрезок AM – высота остроугольного треугольника ABM. Найдите величины углов, образованных полупрямой $[AM$ и сторонами AB и AC треугольника, если:
а) $m(\angle B) = 70°$, $m(\angle C) = 50°$;
б) величины внешних углов треугольника при вершинах B и C равны 120° и 110°, соответственно.

10. Дан равнобедренный треугольник ABC, у которого $[AB] \equiv [AC]$, $[AM]$ и $[CN]$ – две высоты треугольника. Вычислите:
а) величины углов, образованных полупрямой $[AM$ с $[AB$ и $[AC$, если $m(\angle B) = 78°$;
б) величины углов, образованных полупрямой $[CN$ с $[CA$ и $[CB$, если $m(\angle A) = 50°$;
в) $m(\angle B)$, если $m(\angle MAC) = 27°$;
г) $m(\angle A)$, если $m(\angle MCN) = 31°$.

11. Рассмотрите рисунок ($[AB] \equiv [BC]$) и вычислите величину угла, обозначенную через x.



а) б) в)

12. $[AM]$ и $[CN]$ – медианы треугольника ABC. Вычислите:
а) периметр треугольника BMN, если периметр треугольника ABC равен $8\sqrt{7}$ см;
б) периметр четырехугольника ANMC, если периметр треугольника ABC равен 28 см и $AC = 10$ см.

13. Медиана AM треугольника ABC конгруэнтна отрезку BM. Докажите, что величина одного из углов треугольника ABC равна сумме величин двух других углов этого треугольника.

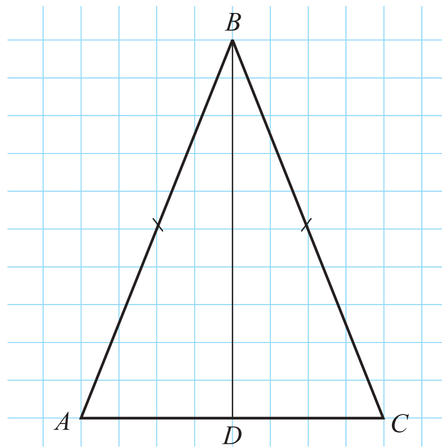
14. Дан треугольник ABC, у которого $[AB]\equiv[AC]$. Точки M и N принадлежат стороне BC так, что $[BM]\equiv[CN]$. Найдите $m(\angle MAN)$, если $m(\angle BMA)=115°$.

§3. Свойства равнобедренного треугольника

1 Рассмотрите рисунок. Дополните одним из понятий: *медиана*, *биссектриса*, *высота* – так, чтобы получить истинное высказывание.

Отрезок BD – ______ равнобедренного треугольника ABC.

• Сформулируйте вывод.



Теорема 1
Медиана, биссектриса и высота, проведенные из вершины равнобедренного треугольника к его основанию, совпадают.

Докажем теорему 1.

Условие: ΔABC, $[AB]\equiv[CB]$.

Заключение:

Если отрезок $[BD]$ – медиана, то отрезок $[BD]$ является биссектрисой и высотой.
Если отрезок $[BD]$ – биссектриса, то отрезок $[BD]$ является высотой и медианой.
Если отрезок $[BD]$ – высота, то отрезок $[BD]$ является медианой и биссектрисой.

Доказательство:

Если отрезок $[BD]$ – медиана, то $\Delta ABD\equiv\Delta CBD$ (признак ССС).
Если отрезок $[BD]$ – биссектриса, то $\Delta ABD\equiv\Delta CBD$ (признак СУС).
Если отрезок $[BD]$ – высота, то $\Delta ABD\equiv\Delta CBD$ (признак ГК).
Заключение теоремы следует из конгруэнтности треугольников ABD и CBD,

ч. т. д. ►

Доказав теорему 1, мы показали, что треугольники ABD и CBD конгруэнтны. Следовательно, $\angle A \equiv \angle C$.

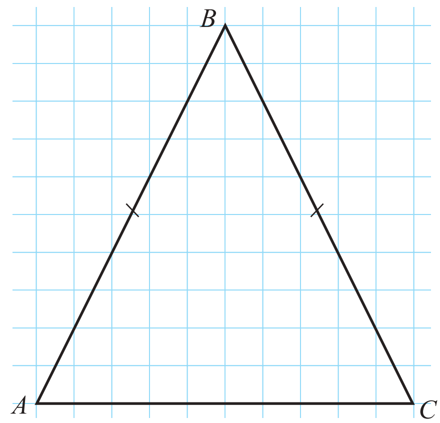
Теорема 2
Углы при основании равнобедренного треугольника конгруэнтны.

Замечание. Высказывание, обратное теореме 2, также верно.

• Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме 2.

Практическая работа

1. Перечертите рисунок.
2. Проведите высоты, медианы и биссектрисы треугольника, исходящие из вершин A и C. Сравните длины:
   а) медиан;
   б) биссектрис;
   в) высот.
   Сформулируйте вывод.



Теорема 3
Медианы, проведенные из вершин основания равнобедренного треугольника, конгруэнтны.

Теорема 4
Биссектрисы, проведенные из вершин основания равнобедренного треугольника, конгруэнтны.

Теорема 5
Высоты, проведенные из вершин основания равнобедренного треугольника, конгруэнтны.

Докажем теорему 3.

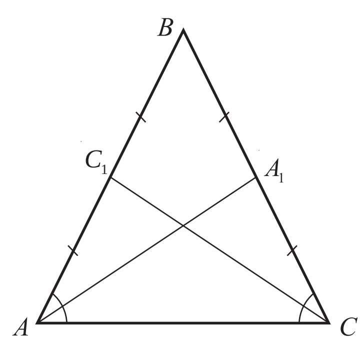
Условие: ΔABC, $[AB] \equiv [CB]$,
$[AA_1]$, $[CC_1]$ – медианы треугольника ABC.

Заключение: $[AA_1] \equiv [CC_1]$.

Доказательство:

$\Delta AC_1C \equiv \Delta CA_1A$ (признак СУС: $[AC]$ – общая сторона, $[AC_1] \equiv [CA_1]$ по условию, $m(\angle A) \equiv m(\angle C)$ по теореме 2).

Следовательно, $[AA_1] \equiv [CC_1]$, ч. т. д. ►



• Докажите теоремы 4 и 5.

Замечание. Высказывания, обратные теоремам 3–5, также верны.

• Сформулируйте и докажите теоремы, обратные теоремам 3–5.

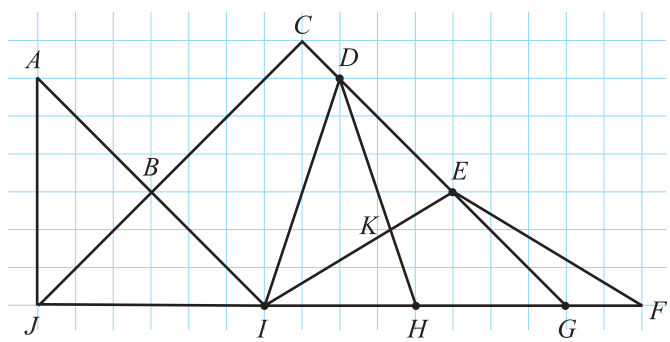
Признаки равнобедренного треугольника

Треугольник является равнобедренным, если выполняется хотя бы одно из условий:

1) два угла треугольника конгруэнтны;
2) одна из медиан и одна из биссектрис треугольника совпадают;
3) одна из медиан и одна из высот треугольника совпадают;
4) одна из биссектрис и одна из высот треугольника совпадают;
5) две медианы треугольника конгруэнтны;
6) две биссектрисы треугольника конгруэнтны;
7) две высоты треугольника конгруэнтны.

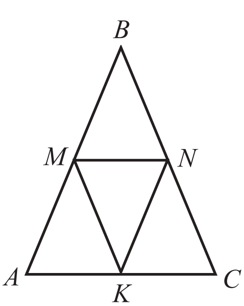
Упражнения и задачи

1. Рассмотрите рисунок и укажите равнобедренные треугольники.



2. Углы A и B треугольника ABC – конгруэнтны. Вычислите:
а) AC, если $BC = 6$ см;
б) BC, если $AC + BC = 11$ см;
в) 2AC, если $3BC = 15$ см;
г) $2AC - BC$, если $AC = \sqrt{5}$ см.

3. $[BM]$ – медиана равнобедренного треугольника ABC с основанием AC. Вычислите:
а) $m(\angle ABC)$, если $m(\angle ABM) = 25°$;
б) $m(\angle A)$, если $m(\angle MBC) = 28°$;
в) $m(\angle C)$, если $m(\angle ABM) + m(\angle AMB) = 130°$;
г) $m(\angle ABM)$, если $m(\angle C) + m(\angle BMC) = 124°$.

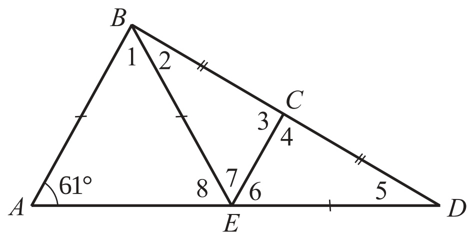


4. На рисунке $[AB] \equiv [BC]$ и точки M, N, K – середины сторон треугольника ABC. Перечислите:
а) конгруэнтные отрезки;
б) конгруэнтные углы.

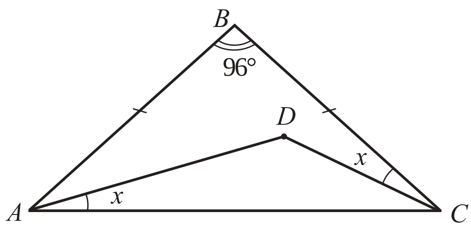
5. Используя рисунок и условие упражнения 4, найдите:
 а) $m(\angle MKN)$, если $m(\angle A) = 44°$;
 б) $m(\angle B)$, если $m(\angle KMN) = 55°$;
 в) $m(\angle A)$, если $m(\angle B) + m(\angle MKN) = 80°$;
 г) $m(\angle C)$, если $m(\angle A) + m(\angle KMN) = 88°$.

6. Используя рисунок и условие упражнения 4, найдите:
 а) MN, если $AC + MN = 18$ см;
 б) AM, если $MB + NC = 9$ см;
 в) BN, если $AM + MK = 4\sqrt{3}$ см;
 г) KN, если $AB + BC = 8,(4)$ см.

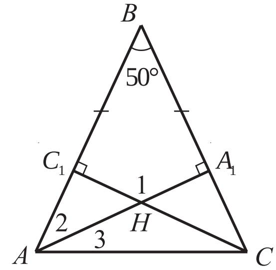
7. Рассмотрите рисунок. Учитывая, что $[AB] \equiv [BE] \equiv [DE]$, $[BC] \equiv [CD]$, $m(\angle A) = 61°$, вычислите величины углов 1–8.



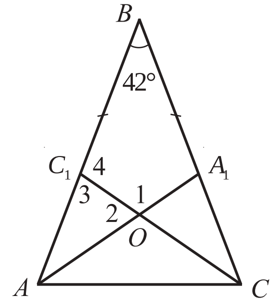
8. Рассмотрите рисунок. Учитывая, что $[AB] \equiv [BC]$, $m(\angle B) = 96°$, вычислите $m(\angle ADC)$.



9. Рассмотрите рисунок. Учитывая, что $[AB] \equiv [BC]$, $[AA_1]$ и $[CC_1]$ – высоты треугольника ABC, $m(\angle B) = 50°$, вычислите величины углов 1–3.

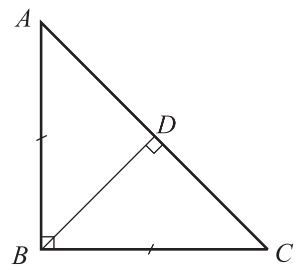


10. Рассмотрите рисунок. Учитывая, что $[AB] \equiv [BC]$, $[AA_1]$ и $[CC_1]$ – биссектрисы треугольника ABC, $m(\angle B) = 42°$, вычислите величины углов 1–4.



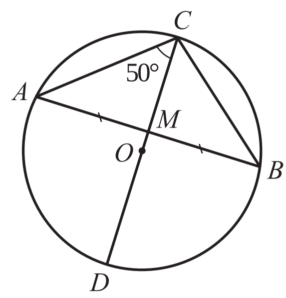
11. Найдите длины сторон равнобедренного треугольника, если:
а) периметр треугольника равен 28 см и одна из сторон треугольника на 8 см короче другой;
б) периметр треугольника равен 42 см и одна из сторон треугольника в 2,5 раза длиннее другой.

12. Треугольник ABC, изображенный на рисунке, равнобедренный и прямоугольный ($m(\angle B)=90°$, $[AB]\equiv[AC]$), отрезок $[BD]$ – высота треугольника ABC.
Найдите BD, если $AC=4\sqrt{2}$ см.

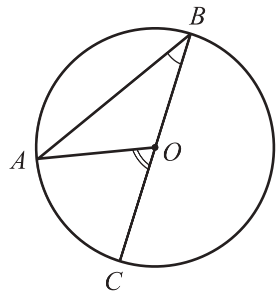


13. Диаметр AB окружности пересекает хорду CD в точке M под углом 90°.
Найдите CM и DM, если $CD=18$ см.

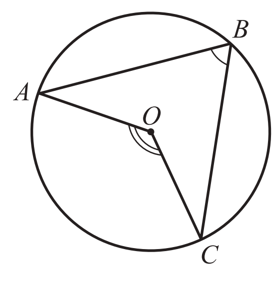
14. Диаметр CD окружности пересекает хорду AB в точке M, которая является серединой хорды (см. рисунок).
Найдите $m(\angle ABC)$, если $m(\angle ACM)=50°$.



15. Отрезок BC – диаметр окружности с центром в точке O, а точка A принадлежит этой окружности (см. рисунок).
Докажите, что $m(\angle AOC)=2m(\angle ABC)$.



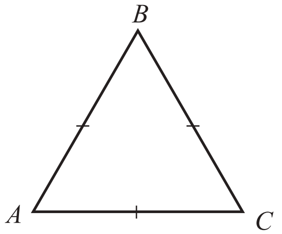
16. Точки A, B, C принадлежат окружности с центром в точке O так, что точка O расположена между сторонами угла AOB (см. рисунок).
Докажите, что $m(\angle AOC)=2m(\angle ABC)$.
Указание. Используйте результат, полученный в упражнении 15.



§ 4. Свойства равностороннего треугольника

1 Используя соответствующие инструменты и учитывая свойства равнобедренного треугольника, сформулируйте как можно больше истинных высказываний об элементах и замечательных линиях равностороннего треугольника.

Пример: Медианы равностороннего треугольника конгруэнтны.



Замечание. Равносторонний треугольник – одновременно и равнобедренный.

Теорема 1

Если треугольник является равносторонним, то его углы конгруэнтны и их величины равны 60°.

Докажем теорему 1.

Условие: ΔABC – равносторонний.

Заключение: $\angle A \equiv \angle B \equiv \angle C$, $m(\angle A) = 60°$.

Доказательство:

① Так как $[AB] \equiv [CB]$, то $\angle A \equiv \angle C$ (по теореме об углах при основании равнобедренного треугольника).

② Так как $[AC] \equiv [BC]$, то $\angle A \equiv \angle B$.

③ Из пунктов ① и ② следует, что $\angle A \equiv \angle B \equiv \angle C$. Значит, $m(\angle A) = 180° : 3 = 60°$,

ч. т. д. ►

Теорема 2 (обратная теореме 1)

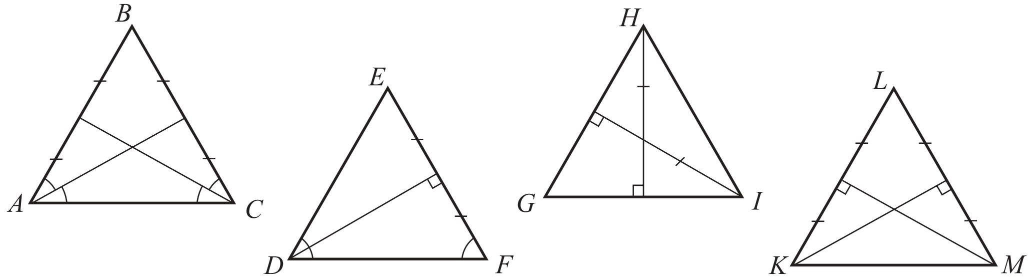
Если углы треугольника конгруэнтны, то треугольник равносторонний.

• Докажите теорему 2.

Теорема 3

Медиана, биссектриса и высота, проведенные из одной вершины равностороннего треугольника, совпадают. Медианы, биссектрисы и высоты равностороннего треугольника – конгруэнтны.

2 Рассмотрите рисунок и определите, какие из данных треугольников равносторонние.



Теорема 4
Если две медианы треугольника являются его биссектрисами, то треугольник равносторонний.

Теорема 5
Если две медианы треугольника являются его высотами, то треугольник равносторонний.

Теорема 6
Если две высоты треугольника являются его биссектрисами, то треугольник равносторонний.

• Докажите теоремы 4–6.

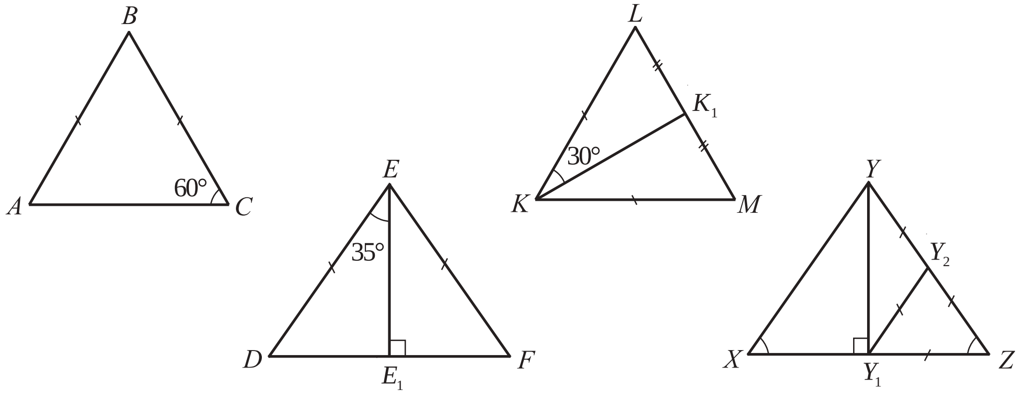
Признаки равностороннего треугольника

Треугольник является равносторонним, если выполняется хотя бы одно из условий:

1) все углы треугольника конгруэнтны;
2) две медианы треугольника являются биссектрисами этого треугольника;
3) две медианы треугольника являются высотами этого треугольника;
4) две биссектрисы треугольника являются высотами этого треугольника;
5) медианы треугольника конгруэнтны;
6) биссектрисы треугольника конгруэнтны;
7) высоты треугольника конгруэнтны;
8) треугольник является равнобедренным и величина одного из углов равна 60°.

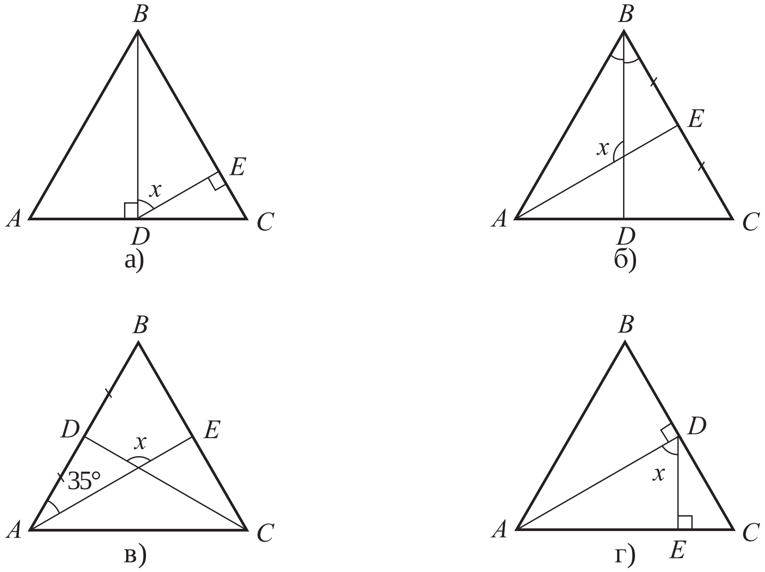
Упражнения и задачи

1. Рассмотрите рисунок и определите, какие из данных треугольников равносторонние.



2. Используя линейку и циркуль, постройте равносторонний треугольник со сторонами:
а) 4 см; б) 5 см.

3. Треугольник ABC, изображенный на рисунке, равносторонний. Рассмотрите рисунок и найдите величину угла, обозначенную через x.



4. Вычислите периметр равностороннего треугольника, если длина его средней линии равна $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ см.

5. Площадь равностороннего треугольника ABC равна $60\ см^2$. Найдите площадь треугольника, образованного средними линиями треугольника ABC.

6. Высота равностороннего треугольника равна 8 см. Точка M находится на одном и том же расстоянии d от сторон треугольника. Найдите R + d, где R радиус окружности, содержащей вершины треугольника.

7. Высота равностороннего треугольника равна 9 см. Найдите радиус окружности, содержащей вершины этого треугольника.

8. Высота равностороннего треугольника равна 12 см. Найдите расстояние от точки, равноудаленной от сторон этого треугольника, до его стороны.

9. Радиус окружности, содержащей вершины равностороннего треугольника, равен 5 см. Найдите высоту треугольника.

10. Точка M находится на одном и том же расстоянии d от сторон равностороннего треугольника. Найдите высоту треугольника, если d = 7 см.

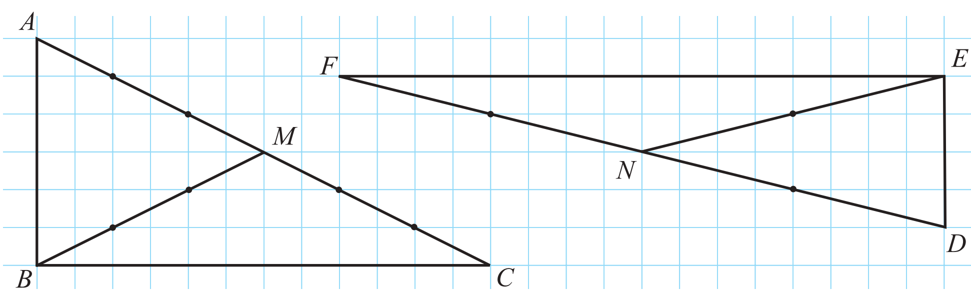
11. Высота равностороннего треугольника ABC равна 8,4 см. Найдите высоту треугольника AOB, проведенную из вершины O, если точка O равноудалена от сторон треугольника ABC.

12. Найдите величины углов, образованных пересечением биссектрисы и медианы равностороннего треугольника.
13. Высота и медиана равностороннего треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите площадь треугольника AMB, если площадь треугольника ABC равна 24 $см^2$.

14. Медиана AA_1 и биссектриса BB_1 равностороннего треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника A_1BM равна 6 $см^2$.
15. Биссектриса AA_1 и высота CC_1 равностороннего треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите площадь треугольника MA_1C_1, если площадь треугольника ABC равна 96 $см^2$.
16. Дан равнобедренный треугольник ABC, у которого $[AB] \equiv [BC]$. Точки M и N принадлежат внешней области треугольника ABC так, что треугольники ABM и BCN – равносторонние. Докажите, что $MN \parallel AC$.

§5. Свойства прямоугольного треугольника

• Рассмотрите рисунок.



Дополните:

а) Треугольники ABC и DEF являются ______ треугольниками.

б) ______ и ______ – катеты треугольника ABC.

в) Отрезок $[FD]$ – ______ треугольника DEF.

г) Отрезок $[BM]$ – ______ треугольника ABC.

$[BM] \equiv$ ______, $[BM] \equiv$ ______.

д) Отрезок ______ – медиана треугольника DEF. $[FN] \equiv$ ______ $\equiv [ND]$.

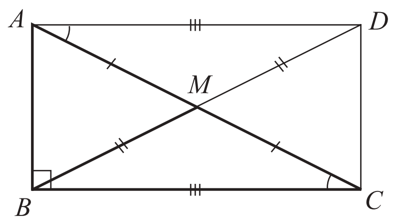
Сформулируйте вывод. Проверьте циркулем.

Теорема 1
Длина медианы, соответствующей гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине длины гипотенузы.

Докажем теорему 1.

Условие: ΔABC, $m(\angle B) = 90°$, $[BM]$ – медиана.

Заключение: $BM = \frac{1}{2}AC$.



Доказательство:

① На полупрямой $[BM$ отметим такую точку D, что $[BM] \equiv [DM]$.

② $\Delta ADM \equiv \Delta CBM$
(По признаку СУС: $[AM] \equiv [CM]$ – по условию, $[BM] \equiv [DM]$ – по построению, $\angle AMD \equiv \angle CMB$ – вертикальные углы).

③ $AD \parallel BC$ (Внутренние накрест лежащие углы DAM и BCM конгруэнтны согласно пункту ②).

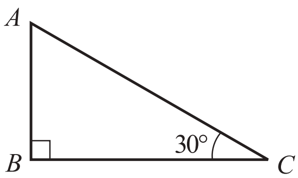
④ $AB \perp AD$, так как $AB \perp BC$ и $AD \parallel BC$.
Следовательно, ΔBAD – прямоугольный.

⑤ $\Delta ABC \equiv \Delta BAD$ (По признаку КК: $[AB]$ – общий катет, $[AD] \equiv [BC]$ согласно пункту ②).
Следовательно, $[AC] \equiv [BD]$ и $BM = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AC$, ч. т. д. ►

• Дополните так, чтобы получить высказывание, обратное теореме 1, которое также является верным: *Если длина медианы треугольника равна..., то...*

Теорема 2
Если величина одного из углов прямоугольного треугольника равна 30°, то длина катета, противолежащего этому углу, равна половине длины гипотенузы.

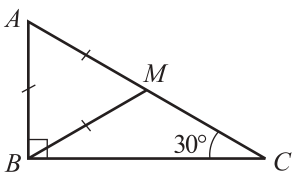
Докажем теорему 2.



Условие: ΔABC – прямоугольный, $m(\angle B) = 90°$, $m(\angle C) = 30°$.

Заключение: $AB = 0{,}5AC$.

Доказательство:



① Проведем медиану $[BM]$.

② $[BM] \equiv [AM]$ (согласно теореме 1).

③ $m(\angle A) = 180° - m(\angle B) - m(\angle C) = 180° - 90° - 30° = 60°$

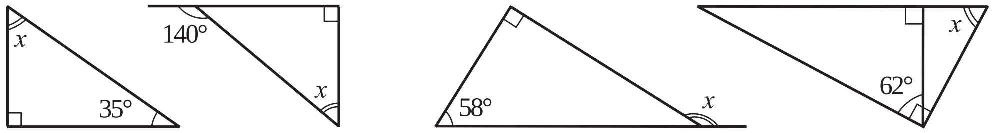
④ ΔAMB – равнобедренный (по пункту ②) и $m(\angle A) = 60°$.
Следовательно, ΔAMB – равносторонний (по признаку 8, стр.204).

⑤ Итак, ΔAMB – равносторонний и $AB = AM = 0{,}5AB$, ч.т.д. ►

• Высказывание, обратное теореме 2, также верно. Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме 2.

Упражнения и задачи

1. Найдите величину угла, обозначенную через x:



а) б) в) г)

2. Дан треугольник ABC с прямым углом B. Найдите длину медианы BM, если:
   а) $AC = 10$ см; б) $AM = 8$ см; в) $MC = \sqrt{2}$ см; г) $BM + AC = 12$ см.

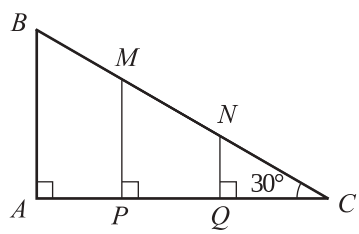
3. Отрезок BM – медиана треугольника ABC с прямым углом B. Найдите:
   а) AC, если $BM = 6$ см; б) AM, если $BM = \sqrt{5}$ см;
   в) MC, если $AM + BM = 9$ см; г) $\dfrac{AC + BM}{AM}$.

4. Точка T – середина гипотенузы PS прямоугольного треугольника PRS. Найдите:
   а) $\text{m}(\angle S)$, если $\text{m}(\angle TRS) = 32°$; б) $\text{m}(\angle P)$, если $\text{m}(\angle PTR) = 100°$;
   в) $\text{m}(\angle TRP)$, если $\text{m}(\angle S) = 40°$; г) $\text{m}(\angle RTS)$, если $\text{m}(\angle PRT) = 42°$.

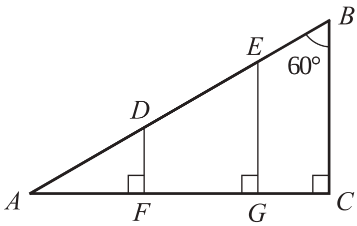
5. Дан треугольник ABC с прямым углом B. Известно, что $\text{m}(\angle C) = 30°$. Найдите:
   а) AB, если $AC = 16$ см;
   б) AC, если $AB = 6$ см;
   в) AB, если $[AC]$ на 11 см длиннее $[AB]$;
   г) AC, если $[AB]$ на $\sqrt{5}$ см короче $[AC]$.

6. Точка M – середина гипотенузы AC прямоугольного треугольника ABC. Зная, что $\text{m}(\angle A) = 30°$, найдите:
   а) BM, если $BC = 11$ см;
   б) BC, если $BM = 9$ см;
   в) периметр треугольника BMC, если $AC = 16$ см;
   г) AC, если периметр треугольника BMC равен 15 см.

7. Рассмотрите рисунок. Найдите:
   а) AB, PM, QN, если $BM = 8$ см, $MN = 9$ см, $NC = 10$ см.
   б) BM, MN, NC, если $AB = 4\sqrt{2}$ см, $PM = 3\sqrt{2}$ см, $QN = 2\sqrt{2}$ см.

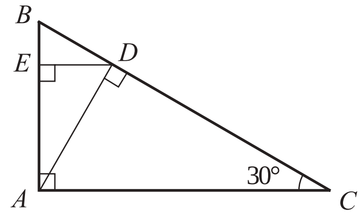


8. Рассмотрите рисунок. Найдите:
   а) DF, EG, BC, если
   $AD = DE = 4\sqrt{5}$ см, $EB = 3\sqrt{5}$ см;
   б) AD, DE, EB, если
   $DF = 0{,}8EG = 0{,}6BC = 4{,}8$ см.



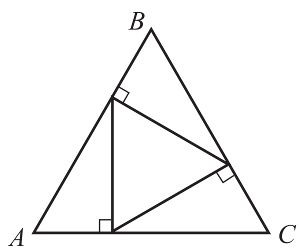
9. Найдите радиус окружности, содержащей вершины прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 6 см.

10. Найдите длину гипотенузы прямоугольного треугольника, вершины которого лежат на окружности радиуса $8\sqrt{3}$ см.



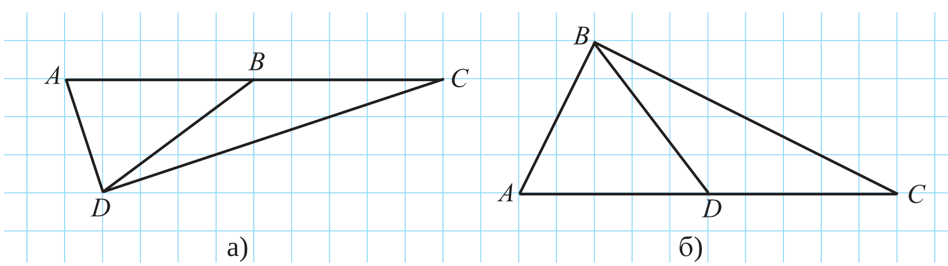
11. Рассмотрите рисунок. Найдите:
    а) ED, если $AC = 24$ см;
    б) AC, если $ED = 10$ см.

12. В равносторонний треугольник ABC вписали другой равносторонний треугольник (см. рис.), стороны которого перпендикулярны сторонам треугольника ABC. В каком соотношении вершины вписанного треугольника делят стороны треугольника ABC?



13. Отрезок BM – медиана треугольника ABC с прямым углом B. Найдите площадь треугольника ABM, если площадь треугольника ABC равна 40 $см^2$ и $m(\angle C) = 30°$.

14*. Рассмотрите рисунок. Учитывая, что длина стороны квадрата клеточной сетки равна 0,5 см, вычислите длину отрезка BD.
Составьте аналогичную задачу.



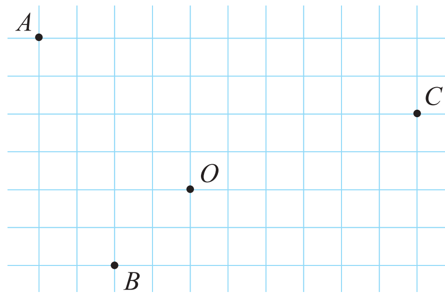
Занимательная математика

15. Вырежьте из картона 4 одинаковые фигуры в виде прямоугольного треугольника, у которого один из углов равен 30°. Образуйте из этих фигур прямоугольный треугольник, у которого один из углов также равен 30°.

§ 6. Симметрии

6.1. Симметрия относительно точки

1 а) Перечертите рисунок. Постройте точки A_1, B_1, C_1 так, чтобы точка O была серединой отрезков AA_1, BB_1, CC_1.



б) Считая точку O – началом отсчета прямоугольной системы координат, найдите координаты точек A_1, B, B_1, C, C_1, если точка A имеет координаты (–2, 2).

в) Какая существует связь между координатами концов отрезка, серединой которого является начало отсчета прямоугольной системы координат?

Определения. ♦ Точки A и A_1 называются **симметричными относительно точки** O, если точка O является серединой отрезка AA_1. Точка A является **симметрией точки A_1 относительно точки** O и наоборот.

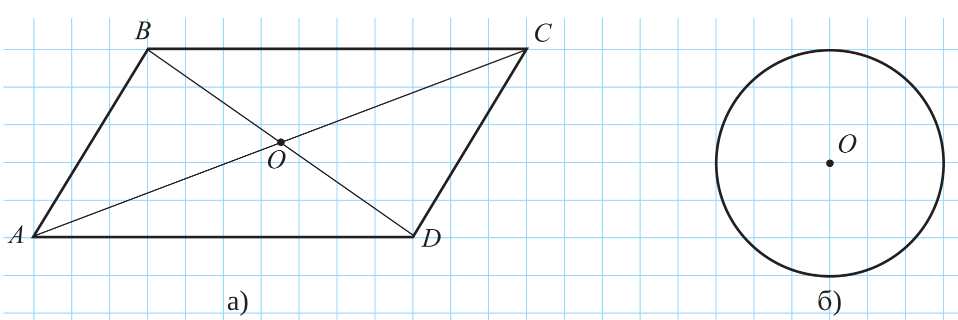
♦ **Фигурой, симметричной фигуре** F **относительно точки** O является множество F_1, образованное из всех точек, симметричных точкам фигуры F относительно точки O. Геометрические фигуры F и F_1 называются **симметричными относительно точки** O.

Теорема 1

Две геометрические фигуры, симметричные относительно точки, конгруэнтны.

• Пусть дан отрезок AB и точка O. Как можно построить фигуру, симметричную отрезку AB относительно точки O? Обоснуйте, применив теорему 1.

2 Перечертите рисунок.



а) б)

Применив теорему, постройте фигуру, симметричную данной относительно точки O. Что вы заметили?

Определение. Если геометрическая фигура F совпадает со своей симметрией относительно точки O, то точка O называется **центром симметрии фигуры** F, а фигура F называется фигурой **центральной симметрии**.

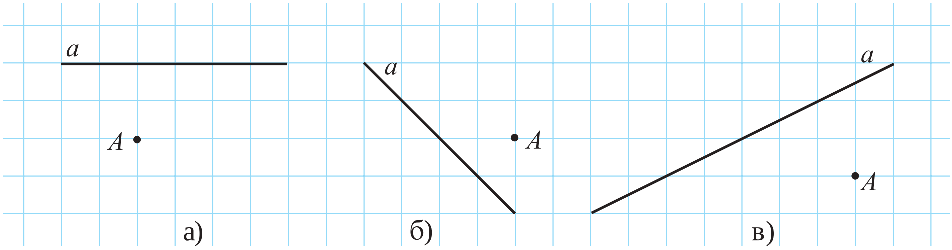
Теорема 2
Центр окружности является ее центром симметрии.

Теорема 3
Точки $A(x, y)$ и $A_1(-x, -y)$ симметричны относительно начала отсчета прямоугольной системы координат.

• Докажите теоремы 2–3.

6.2. Симметрия относительно прямой

1 Перечертите рисунок. Постройте точку A_1 так, чтобы прямая a являлась медиатриссой отрезка AA_1. Сколько таких точек можно построить?



Определения. ♦ Точки A и A_1 называются **симметричными относительно прямой** a, если эта прямая является медиатриссой отрезка AA_1.

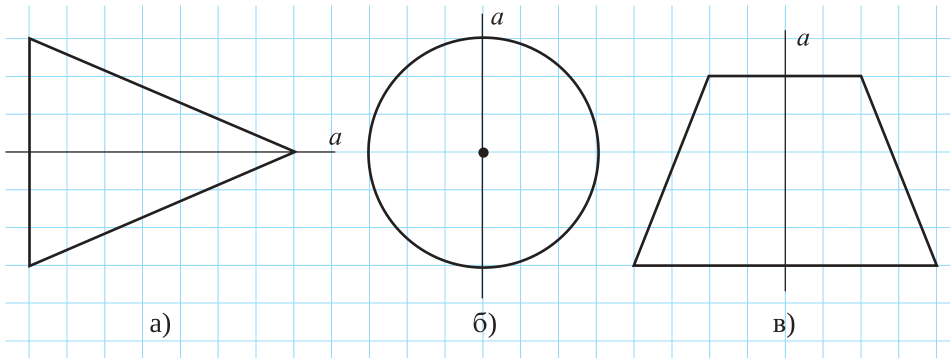
♦ **Фигурой, симметричной геометрической фигуре** F **относительно прямой** a, является множество F_1, образованное из всех точек, симметричных точкам фигуры F относительно прямой a. Геометрические фигуры F и F_1 называются **симметричными относительно прямой** a.

Теорема 1
Две геометрические фигуры, симметричные относительно прямой, конгруэнтны.

• Пусть дан отрезок AB и прямая a. Как можно построить фигуру, симметричную отрезку AB относительно прямой a? Обоснуйте, применив теорему 1.

• В каком случае точка и симметричная ей точка относительно прямой совпадают?

2 Перечертите рисунок. Постройте фигуру, симметричную данной относительно прямой a. Что вы заметили?

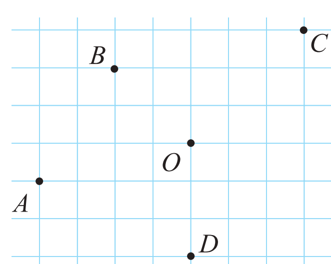


Определение. Если геометрическая фигура F совпадает с симметричной ей фигурой относительно прямой a, то прямая a называется **осью симметрии фигуры** F, а фигура F – **симметричной относительно прямой** a.

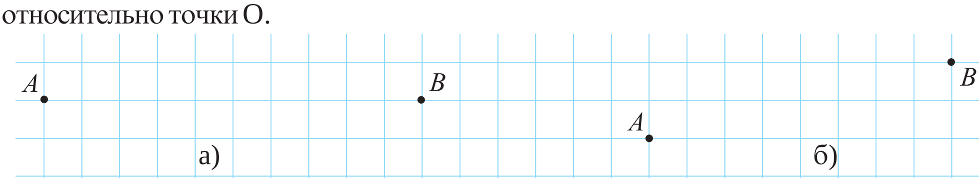
- Определите истинностное значение высказывания:
  а) „Медиатрисса отрезка является его осью симметрии“.
  б) „Равнобедренный треугольник имеет ось симметрии“.
  в) „Угол не имеет оси симметрии“.
  г) „У равностороннего треугольника одна ось симметрии“.
  д) „У окружности более 10 осей симметрии“

Упражнения и задачи

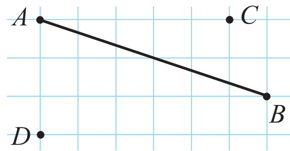
1. Перечертите рисунок. Постройте точки, симметричные точкам A, B, C, D относительно точки O.



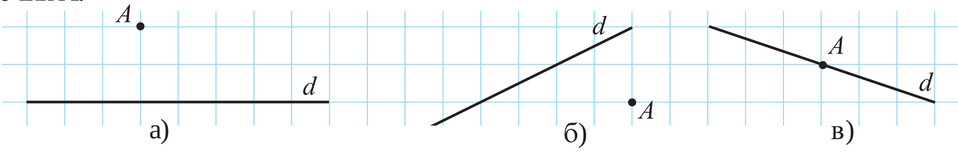
2. Перечертите рисунок. Отметьте точку O так, чтобы точки A и B были симметричными относительно точки O.



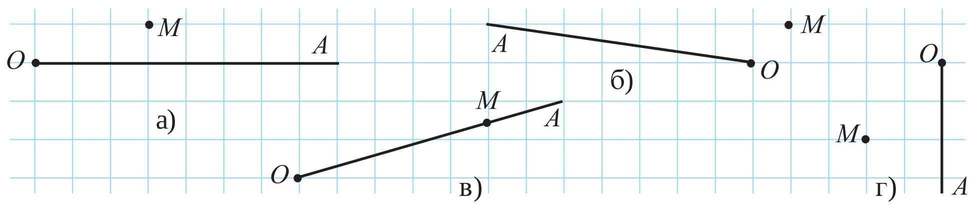
3. Перечертите рисунок. Постройте отрезок, симметричный отрезку AB относительно точки:
а) C; б) D.



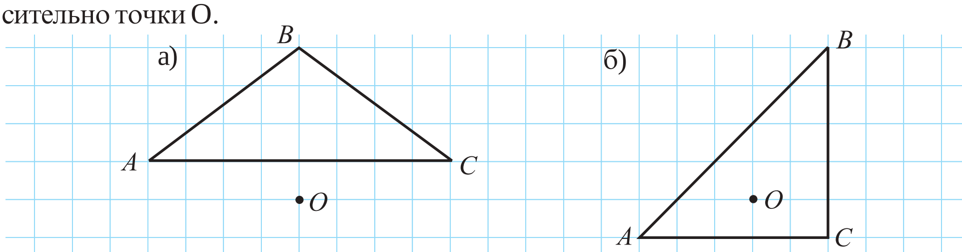
4. Перечертите рисунок. Постройте прямую, симметричную прямой d относительно точки A.



5. Перечертите рисунок. Постройте полупрямую, симметричную полупрямой [OA относительно точки M.

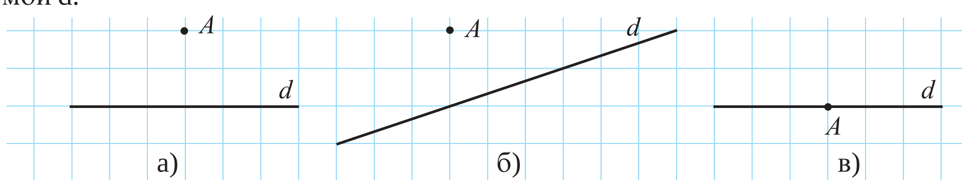


6. Перечертите рисунок. Постройте треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно точки O.

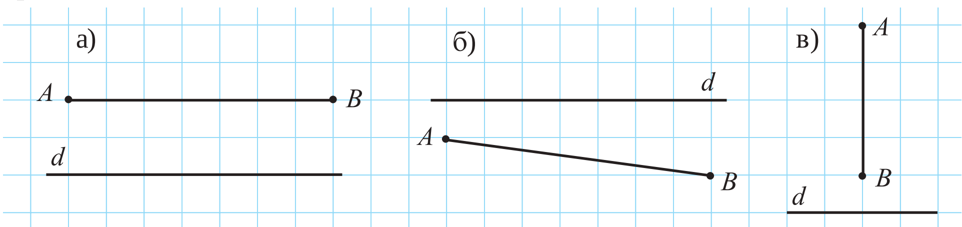


7. Найдите координаты точек, симметричных точкам A (–2, 3), B (1, 4), C (2, –7) относительно начала отсчета прямоугольной системы координат.

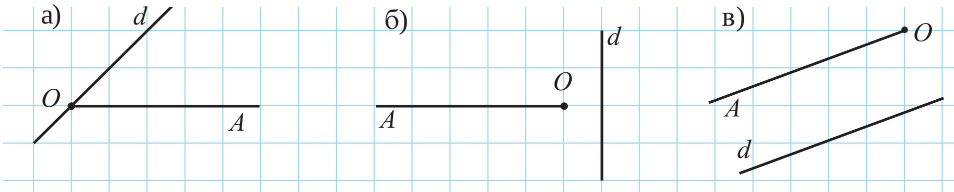
8. Перечертите рисунок. Постройте точку, симметричную точке A относительно прямой d.



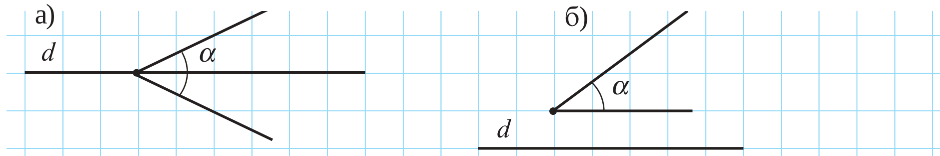
9. Перечертите рисунок. Постройте отрезок, симметричный отрезку AB относительно прямой d.



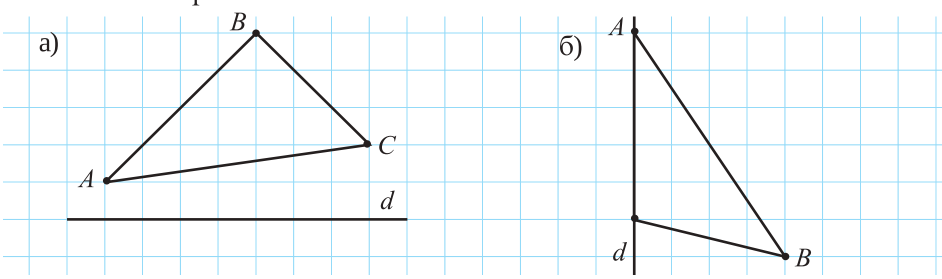
10. Перечертите рисунок. Постройте полупрямую, симметричную полупрямой [OA относительно прямой d.



11. Перечертите рисунок. Постройте угол, симметричный углу α относительно прямой d.



12. Перечертите рисунок. Постройте треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно прямой d.



13. Впишите такое число, чтобы получить истинное высказывание.

а) „У квадрата ____ оси симметрии".

б) „У полуокружности ____ ось симметрии".

в) „У ромба ____ оси симметрии".

г) „У равностороннего треугольника ____ оси симметрии".

14. Точки A и B симметричны относительно точки M. Найдите координаты точки M, если: а) A(3, 0) и B(1, 4); б) A(–1, 5) и B(5, –1); в) A(2, 9) и B(4, 7); г) A(3, –11) и B(0, 1).

15. Найдите координаты точки, симметричной точке A относительно точки B, если:
а) A(1, 1) и B(2, 2); б) A(–2, 0) и B(0, –2);
в) A(2, 5) и B(3, 1); г) A(11, –7) и B(8, –4).

16. Найдите координаты точки, симметричной середине отрезка AB относительно O (0; 0), если: а) A(4, 0) и B(2, 0); б) A(–2, 1) и B(1, –2);
в) A(–5, 5) и B(11, 11); г) $A\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ и B(–1, 2).

17. Найдите точки, симметричные точкам А (2; 7), В (–3; 1,5), $C\,(2\sqrt{2};-4)$ относительно:
а) оси Ox; б) оси Oy.

18. Треугольники ABC и $A'B'C'$ – симметричны относительно прямой. Найдите $\mathrm{m}(\angle A'C'B')$, если $\mathrm{m}(\angle B)=90°$, $\mathrm{m}(\angle A)=35°$, точка A' симметрична точке A, а точка B' симметрична точке B.

19. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC. Прямая AP – медиатрисса основания. Точки M и N принадлежат сторонам AB и AC так, что $MN \parallel BC$. Покажите, что точки M и N симметричны относительно AP.

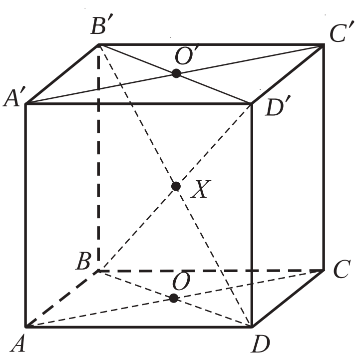
20. Точка D симметрична точке B относительно несущей прямой стороны AC треугольника ABC. Какого вида треугольники BCD и ABD?

21. Дан треугольник ABC, у которого $AB=6$ см, $AC=9$ см и $BC=4$ см. Точка D симметрична точке B относительно AC, а точка E симметрична точке C относительно AB. Вычислите:
а) $EB+BC+CD$; б) $AE+AD$.

22. Фигура, образованная объединением прямых d_1, d_2, d_3, имеет бесконечное количество центров симметрии. Определите взаимное расположение этих прямых.

23. Прямые a и b симметричны относительно точки O. Прямые c и d пересекаются в точке O и пересекают прямую a в точках A и B, а прямую b – в точках C и D. Вычислите CD, если $AB=12$ см.

24. На рисунке изображен куб $ABCDA'B'C'D'$,
$\{O\}=AC\cap BD$, $\{O'\}=A'C'\cap B'D'$,
$\{X\}=BD'\cap B'D$.
Назовите точку:
а) симметричную точке A относительно точки O;
б) симметричную точке B относительно точки O;
в) симметричную точке A' относительно точки X;
г) симметричную точке C' относительно точки X;
д) симметричную точке O относительно точки X;
е) симметричную точке B относительно точки X;
ж) симметричную точке D относительно точки X;
з) относительно которой симметричны точки A и C';
и) относительно которой симметричны точки B' и D;
к) относительно которой симметричны точки A и C.

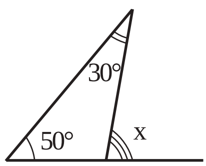


25. Докажите, что если у треугольника две оси симметрии, то он равносторонний.

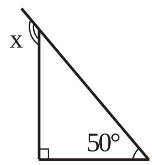
Упражнения и задачи на повторение

1. Дан треугольник ABC. Найдите:
   а) $m(\angle A)$, если $m(\angle B)=60°$, $m(\angle C)=70°$;
   б) $m(\angle B)$, если $m(\angle A)=m(\angle C)=25°$;
   в) $m(\angle C)$, если $m(\angle A)+m(\angle B)=100°$;
   г) $m(\angle A)$, если $m(\angle A)=m(\angle B)=m(\angle C)$.

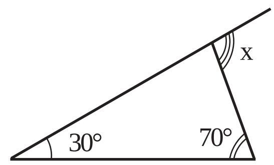
2. Найдите величину угла, обозначенную через x:



а)



б)



в)

3. Вычислите величины внешних углов треугольника ABC, если:
   а) $m(\angle A)=30°$, $m(\angle B)=75°$;
   б) $m(\angle A)=m(\angle B)=40°$;
   в) $m(\angle A)=2m(\angle B)=70°$;
   г) $\frac{2}{3}m(\angle A)=m(\angle B)=60°$.

4. *Истинно* или *ложно*?
   а) Если ортоцентр треугольника совпадает с его вершиной, то этот треугольник прямоугольный.
   б) Точка пересечения медиатрисс тупоугольного треугольника принадлежит внутренней области этого треугольника.
   в) Центр тяжести тупоугольного треугольника не принадлежит внутренней области этого треугольника.

5. Точка G – центр тяжести треугольника ABC, а A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, AC, AB соответственно. Вычислите:
   а) AG и BG, если $AA_1=12$ см и $BB_1=9$ см;
   б) BG и CG, если $BB_1=3{,}3$ см и $CC_1=3$ см;
   в) A_1G и B_1G, если $AA_1=18$ см и $BB_1=15$ см;
   г) A_1G и C_1G, если $AA_1=1{,}5$ см и $CC_1=2{,}4$ см.

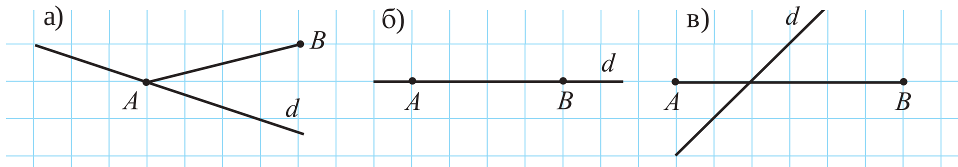
6. Точка O равноудалена от сторон треугольника ABC. Вычислите:
   а) величины углов треугольника ABC, если $m(\angle BAO)=30°$, $m(\angle COA)=125°$;
   б) $m(\angle BAO)$, $m(\angle COA)$, если $m(\angle A)=70°$, $m(\angle B)=100°$;
   в) $m(\angle AOB)$, $m(\angle BOC)$, если $m(\angle A)=50°$, $m(\angle B)=60°$;
   г) $m(\angle AOB)+m(\angle BOC)+m(\angle AOC)$.

7. Найдите величины двух углов равнобедренного треугольника, если один из углов треугольника равен:
   а) 60°; б) 90°; в) 100°.

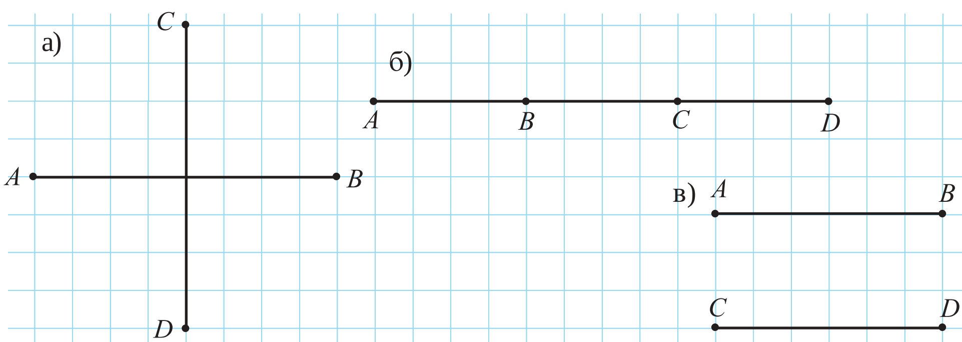
8. Определите вид треугольника, если известно, что:
а) две медианы треугольника конгруэнтны;
б) две биссектрисы треугольника пересекают соответствующие стороны треугольника в их середине;
в) биссектриса треугольника перпендикулярна соответствующей стороне;
г) одна из биссектрис треугольника совпадает с высотой, а другая – с медианой;
д) медиана треугольника в два раза короче стороны, к которой она проведена.

9. Вычислите сумму длин средних линий равностороннего треугольника, сторона которого равна 11 см.

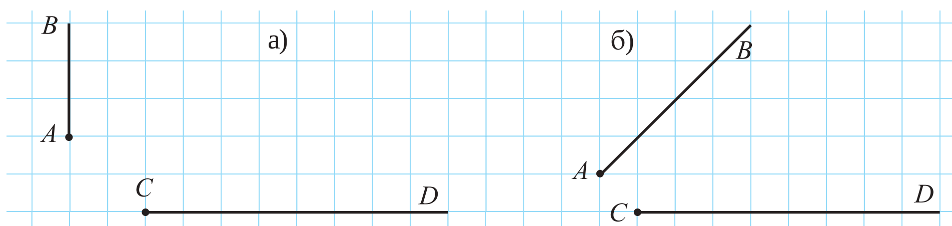
10. Перечертите рисунок. Постройте отрезок, симметричный отрезку AB относительно прямой d.



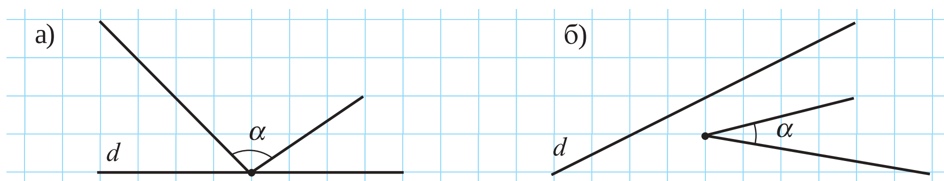
11. Перечертите рисунок. Существует ли прямая d, относительно которой симметричны отрезки AB и CD? Если существует, то постройте ее.



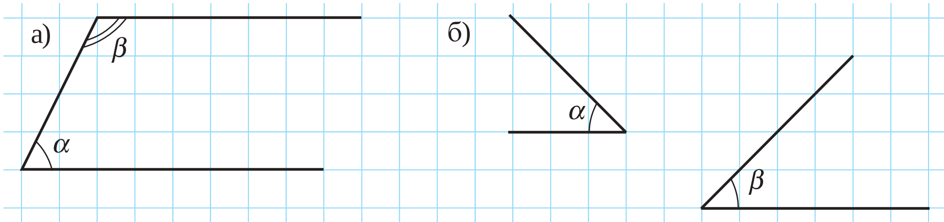
12. Перечертите рисунок. Существует ли прямая d, относительно которой симметричны полупрямые $[AB$ и $[CD$? Если существует, то постройте ее.



13. Перечертите рисунок. Постройте угол, симметричный углу α относительно прямой d.

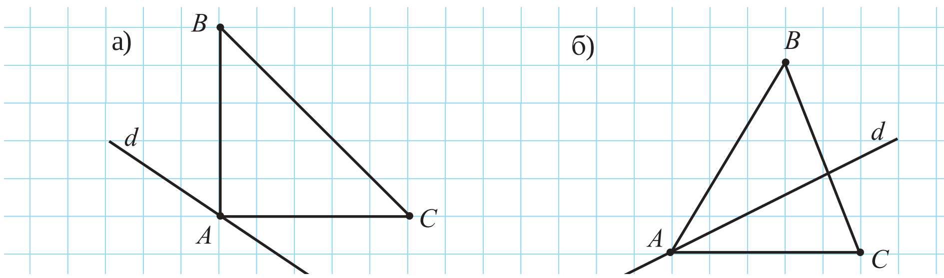


14. Перечертите рисунок. Существует ли прямая d, относительно которой симметричны углы α и β? Если существует, то постройте ее.

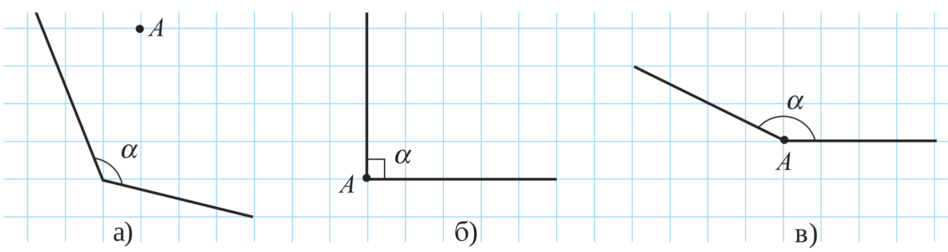


15. Запишите углы треугольника ABC в порядке возрастания их величин, если:
а) $AB = 9$ см, $AC = 8{,}5$ см, $BC = 8,(5)$ см;
б) $AC = \sqrt{11}$ см, $BC = 3\sqrt{2}$ см, $AB = 2\sqrt{3}$ см.

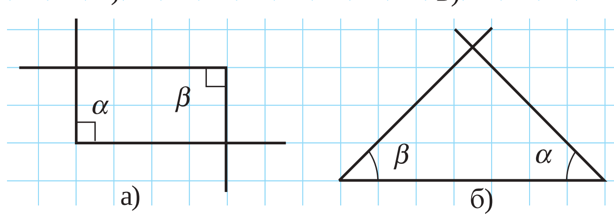
16. Перечертите рисунок. Постройте треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно прямой d.



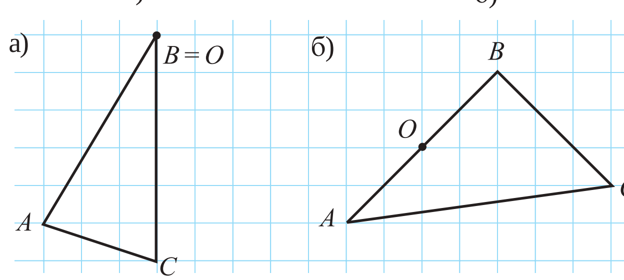
17. Перечертите рисунок. Постройте угол, симметричный углу α относительно точки A.



18. Перечертите рисунок. Существует ли такая точка O, относительно которой будут симметричны угол α и угол β? Если такая точка существует, то отметьте ее.



19. Перечертите рисунок. Постройте треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно точки O.



20. Найдите величины внешних углов треугольника ABC, если величины его углов:
а) прямо пропорциональны числам 1, 2, 3;
б) обратно пропорциональны числам 1,2; 4; 6.

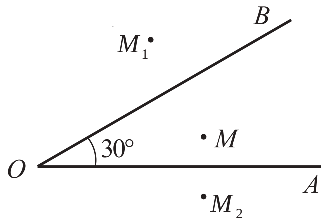
21. Точка G – центр тяжести треугольника ABC, а A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, AC, AB соответственно. Вычислите:
а) AA_1 и BB_1, если $AG = 6$ см и $BG = 5$ см;
б) BB_1 и CC_1, если $B_1G = 6$ см и $C_1G = 5$ см;
в) A_1G и B_1G, если $AG = 4{,}2$ см и $BG = 3{,}8$ см;
г) AA_1 и CC_1, если $AG = 1{,}2 \cdot GC = 8{,}4$ см.

22. Найдите величины углов треугольника, если:
а) величины двух внешних углов этого треугольника равны 70° и 160°.
б) величины внешних углов треугольника прямо пропорциональны числам 11, 12, 13.

23. Пусть $[AM]$ и $[BN]$ – биссектрисы равностороннего треугольника ABC со сторонами $4\sqrt{5}$ см.
Найдите периметр треугольника CMN.

24. Треугольник ABC – равнобедренный с основанием $[AB]$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника AMC, если $AB = 8$ см, точка M – середина стороны AB, а периметр треугольника ABC равен 30 см.

25. Точка M принадлежит внутренней области угла AOB, равного 30°, точки M_1 и M_2 симметричны точке M относительно сторон угла AOB. Найдите $m(\angle M_1OM_2)$ и периметр треугольника M_1OM_2, если $OM = 10$ см.



26. Точка O равноудалена от вершин равнобедренного треугольника ABC с основанием AB. Найдите $m(\angle OBA)$, если $m(\angle OAC) = 20°$.

27. Докажите, что сумма внешних углов треугольника равна 360°.

28. Точки A_1, B_1, C_1 симметричны точкам A, B, C относительно точки O. Докажите, что если точки A, B, C коллинеарны, то точки A_1, B_1, C_1 также коллинеарны.

Занимательная математика

29. Вырежьте из картона фигуру в форме прямоугольного треугольника. Разрежьте фигуру на 3 фигуры в форме треугольника и составьте из них:
а) прямоугольник; б) ромб.

Задача для чемпионов

30. Точка E принадлежит внутренней области квадрата ABCD, причем треугольник DEC – равнобедренный и $m(\angle DEC)=150°$. Определите вид треугольника AEB.

Проверочная работа

Время выполнения работы: 45 минут

1 вариант

1. Найдите величины внешних углов треугольника ABC, если:
$m(\angle A)=60°,\ \ m(\angle B)=20°$. **2б**

2. Медианы AM и CN равнобедренного треугольника ABC с основанием AC пересекаются в точке X.
Найдите периметр треугольника AXC, если $AM=30$ см, $CN=24$ см и $AC=25$ см. **2б**

3. Найдите высоту равностороннего треугольника ABC, зная, что точка M принадлежит внутренней области треугольника ABC и
$AM=BM=CM=8$ см. **3б**

4. Запишите стороны треугольника ABC в порядке убывания их длин, если:
$\dfrac{m(\angle A)}{m(\angle B)}<0{,}9,\ \ \dfrac{m(\angle C)}{m(\angle B)}>1{,}1.$ **3б**

2 вариант

1. Найдите величины внешних углов треугольника ABC, если:
$m(\angle B)=30°,\ \ m(\angle C)=80°$.

2. Медианы AM и CN равнобедренного треугольника ABC с основанием AC пересекаются в точке X.
Найдите периметр треугольника AXN, если $AM=27$ см, $CN=24$ см и $AC=26$ см.

3. Найдите, на каком расстоянии от каждой вершины равностороннего треугольника расположена точка P, если высота этого треугольника равна 8 см и $PA=PB=PC$.

4. Запишите углы треугольника ABC в порядке возрастания их величин, если:
$\dfrac{AB}{AC}>1{,}2,\ \ \dfrac{BC}{AC}<0{,}8.$

Ответы и указания

Алгебра

Глава 1. §1. 3. а) $\frac{21}{14}=\frac{7}{2}$; $\frac{4}{18}=\frac{8}{36}$; $\frac{5}{10}=\frac{4}{8}$; $\frac{6}{8}=\frac{18}{24}$; б) $\frac{18}{27}=\frac{6}{9}$; $\frac{12}{16}=\frac{60}{80}$; $\frac{5}{8}=\frac{20}{32}$; $\frac{16}{28}=\frac{64}{112}$. 4. а) $\frac{5}{6}=0{,}8(3)$; $1\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$; $-\frac{12}{5}=-2{,}4$; $-2\frac{1}{5}=-2{,}2$; $-2{,}(2)=-\frac{20}{9}$; б) $\frac{3}{4}=0{,}75$; $-\frac{21}{24}=-\frac{7}{8}$; $-0{,}75=-\frac{6}{8}$; $1{,}(3)=\frac{4}{3}$; $\frac{7}{8}=0{,}875$. 5. а) 4,(1234); –3,(5); –9,878787...; б) 0,0(21); 16,6363121212... 6. а) $\frac{2}{5}=0{,}4$; $\frac{16}{3}=5{,}(3)$; $-2\frac{3}{8}=-2{,}375$; $1\frac{3}{7}=1{,}(428571)$; $\frac{3}{16}=0{,}1875$; $-\frac{4}{9}=-0{,}(4)$; $\frac{25}{90}=0{,}2(7)$; $-\frac{101}{90}=-1{,}1(2)$; б) $\frac{1}{8}=0{,}125$; $\frac{14}{9}=1{,}(5)$; $-3\frac{5}{6}=-3{,}8(3)$; $2\frac{5}{7}=2{,}(714285)$; $\frac{7}{18}=0{,}3(8)$; $-\frac{7}{9}=-0{,}(7)$; $\frac{34}{900}=0{,}03(7)$; $\frac{21}{990}=0{,}0(21)$. 7. а) $0{,}6=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}=\frac{12}{20}=\frac{18}{30}$; б) $0{,}3=\frac{3}{10}=\frac{6}{20}=\frac{9}{30}=\frac{12}{40}$; в) $2{,}4=2\frac{4}{10}=\frac{24}{10}=\frac{12}{5}=\frac{36}{15}=\frac{48}{20}$; г) $1{,}8=1\frac{8}{10}=\frac{18}{10}=\frac{9}{5}=\frac{27}{15}=\frac{36}{20}$. 8. а) $0{,}16=\frac{4}{25}$; $-3{,}14=-3\frac{7}{50}$; $0{,}(8)=\frac{8}{9}$; $-5{,}(7)=-5\frac{7}{9}$; $0{,}3(5)=\frac{16}{45}$; $8{,}21(6)=8\frac{13}{60}$; $-4{,}97(35)=-4\frac{4819}{4950}$; б) $-0{,}72=-\frac{18}{25}$; $5{,}36=5\frac{9}{25}$; $-0{,}(42)=-\frac{21}{50}$; $-3{,}(18)=-3\frac{2}{11}$; $0{,}5(3)=\frac{8}{15}$; $12{,}3(45)=12\frac{19}{55}$; $-7{,}6(543)=-7\frac{2179}{3330}$. 13. а) 287546 дм; б) 28754,6 м; в) 28,755 м. 14. а) 22,1 г; б) 0,022 кг. 16. а) $64\frac{981}{990}$; б) $\frac{418}{500}=\frac{209}{250}$. 17. а) $n\in\{3;\,9\}$; б) $n=11$.

§2. 7. $a=8{,}91$. 8. а) Ложно; б) истинно; в) ложно; г) ложно. 9. а) $5\frac{5}{6}$; б) 8,(8). 11. а) Истинно; б) ложно. 12. а) $S=\{3{,}8;\,-10{,}8\}$; б) $S=\{14{,}76;\,21{,}24\}$; в) $S=\varnothing$; г) $S=\{2\}$. 13. а) 16; б) –11,5. 14. Шикард. 15. Наибольшая скорость у гепарда, а наименьшая – у кенгуру. 16. а) $x>y$; б) $x>y$; в) $x<y$; г) $x<y$. 17. а) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$; б) $\frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}$; в) $\frac{2}{3}$, 1, 2; г) $\frac{1}{5}, \frac{2}{9}, \frac{1}{4}$. 20. Например, 2, 5, –10, 4, 3.

§3. 1. а) $1\frac{1}{6}$; б) $-\frac{1}{5}$; в) $\frac{5}{21}$; г) $-\frac{3}{16}$; д) $\frac{1}{45}$; е) $-2\frac{19}{60}$. 2. а) 45,294; б) –4,903; в) –12,857; г) 5,76(1); д) –13,463(54); е) 111111,111. 3. а) $6\frac{151}{175}$; б) $\frac{67}{550}$; в) 1,(1); г) –13,8(6). 4. а) $\frac{7}{20}$; б) $\frac{3}{4}$; в) 1,5; г) 3,4. 5. а) $\frac{7}{9}$; б) $-\frac{2}{3}$; в) $-1\frac{2}{7}$; г) $4\frac{1}{3}$. 7. а) $1\frac{53}{210}$; б) 1; в) 0,009; г) 4,3. 9. а) 2,18; б) –5,65; в) –7,5; г) 9,6. 12. а) Цены равны; б) $\frac{31{,}1}{5}<\frac{21{,}78}{3}$, значит, цена муки в 5-килограммовом пакете меньше. 13. 3. 14. 365. 15. 437. 16. $\frac{25}{76}$. 17. $\frac{19}{95}, \frac{26}{65}, \frac{49}{98}$.

18. Используем числа 11, 12 и 21.

21	7	12	27	13
6	20	11	11	32
22	23	16	9	10
12	21	21	12	14
19	9	20	21	11

§4. 4. а) $1\frac{1}{5}$; б) $-0{,}5^6$. 6. а) 1331 лей; б) 7320,5 леев. 7. 480. 9. а) 62,8; б) –33,3. 10. а) 4; б) 1. 11. Например: а) $2^6\cdot 5^6$; б) $2^5\cdot 10^5$; в) $5^5\cdot 6^5$. 12. а) 6; б) 1; в) 6. 13. 2012. 14. а) $94041648\cdot 10^5$ км.

§5. 1. а) 2,04; б) $\frac{4}{5}$; в) 3; г) 2,04. 2. а) $S=\{10,4\}$; б) $S=\{-3,1\}$; в) $S=\{2,2\}$; г) $S=\{16,7\}$; д) $S=\{-4,16\}$; е) $S=\{3,6\}$; ж) $S=\{0,48\}$; з) $S=\{9,55\}$. 3. а) 5; б) 4. 4. 0,88. 5. 19,4. 6. а) $x=4,2$; б) 9,4. 7. 3,2 лея. 8. а) 4; б) 1,52; в) $21,(18)$; г) $12\frac{31}{37}$. 9. 10 см. 10. 4 000 леев. 12. а) $S=\{-7;\ 7\}$; б) $S=\left\{-\frac{5}{9};\ \frac{5}{9}\right\}$; в) $S=\varnothing$; г) $S=\{2,99;\ 3,01\}$; д) $S=\{-0,4;\ 0,4\}$; е) $S=\{4,75;\ 5,25\}$. 13. У задачи два решения: $A(9,2)$, $B(-4,6)$ или $A(-9,2)$, $B(4,6)$. 14. У задачи два решения: $A(6,93)$, $B(-7,79)$ или $A(-6,93)$, $B(7,79)$. **15.** $a=1$, $b=6$. **16.** *Указание.* $n^5-5n^3+4n=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$. **17.** 2178. **19.** 3. **20.** а) 1; б) 1.

Глава 2. §1. 6. а) $S=\{\pm 3\}$; б) $S=\{\pm 5\}$; в) $S=\left\{\pm\frac{1}{2}\right\}$; г) $S=\varnothing$; д) $S=\varnothing$; е) $S=\{0\}$. 7. а) 1,7; б) 3,5; в) 0,44; г) 0,72. 8. а) $\sqrt{8}<3$; б) $9<\sqrt{90}$; в) $3,4>\sqrt{10}$; г) $\sqrt{19}<4,5$; д) $\sqrt{39}>6,2$. 9. а) 23,45; б) 18,08; в) 89,12; г) 70,09. 13. а) $\frac{16}{81}$; б) $\frac{49}{81}$; в) $53\frac{7}{9}$; г) 3,36(1); д) 0,07(1); е) $6\frac{3}{121}$. 14. а) ≈14 см; б) ≈17 см; в) ≈15 см; г) ≈24 см. 15. а) $18,(7)$ см^2; б) $6\frac{43}{81}$ см^2; в) 8,7 см^2; г) $3,(7)$ см^2. 16. а) $\frac{2}{3}$; б) $5\frac{1}{3}$; в) $1\frac{2}{3}$; г) $2\frac{2}{3}$; д) $7\frac{1}{3}$; е) $6\frac{1}{3}$. 17. а) $\frac{17}{30}$; б) $\frac{23}{30}$.

§2. 2. б) $\sqrt{71}>-\sqrt{80}$; в) $-\sqrt{\frac{5}{6}}<1$; г) $\sqrt{2}+3>-3\sqrt{2}$. 3. а) +; б) –; в) –; г) –. 4. а) $-\sqrt{5}$; в) $-2+\sqrt{3}$; д) $\sqrt{2}-\frac{1}{3}$; е) $6+2\sqrt{2}$. 5. а) $-5\sqrt{3}$; $-3\sqrt{5}$; 3,(5); б) $-\frac{7}{4}$; $\sqrt{\frac{4}{7}}$; $\frac{4}{7}$; в) $\sqrt{20}$; $4\frac{1}{2}$; $4\frac{2}{3}$; г) $-8\frac{1}{3}$; –8,3(1); –8,1(3). 8. в) $-2\sqrt{10}$; $2\sqrt{10}$; г) $-1-\sqrt{5}$; $1+\sqrt{5}$. 9. а) $4-\sqrt{7}$; б) $9-\sqrt{80}$; в) $2\sqrt{3}-\sqrt{6}$; г) $5-\sqrt{20}$. 11. а) $|x|<\sqrt{6}$; б) $|x|<\frac{1}{6}$; в) $|x|>3$; г) $|x|>2,4$. 12. а) $x<\frac{4}{5}$; б) $|x|<\sqrt{11}$; в) $|x|>2$; г) $|x|\geq\frac{1}{3}$. 13. *Указание.* Числа равны. 14. а) $BD=\sqrt{5}$ см; б) $FG=2\sqrt{3}$ см.

§3. 1. а) 5,79; б) 4,604; в) 0,77; г) 4,9. 2. а) ≈ 4; б) ≈ –0,7; в) ≈ 4,76; г) –0,3(6). 3. б) $-2\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; $0,3\sqrt{5}$; $7\sqrt{5}$; в) $\sqrt{0,3}$; $2\sqrt{0,3}$. 5. а) $\sqrt{3}$; б) $3\sqrt{6}$; в) $\frac{\sqrt{7}}{2}$; г) $\sqrt{5}$. 6. а) 9; б) –8; в) 6; г) 15. 7. а) 2; б) –7; в) 6; г) –11. 8. г) 147; д) $2,1^5$; е) 27. 9. а) 8; б) 9; в) 0,25; г) 0,0001. 10. а) $2\sqrt{6}$; б) $3\sqrt{7}$; в) $7\sqrt{2}$; г) $4\sqrt{6}$; д) $10\sqrt{2}$; е) $6\sqrt{3}$. 11. а) $\sqrt{12}$; б) $\sqrt{18}$; в) $\sqrt{180}$; г) $-\sqrt{150}$; д) $-\sqrt{112}$; е) $\sqrt{147}$. 12. б) $-3\sqrt{5}>-4\sqrt{3}$; г) $\frac{2}{\sqrt{10}}<\frac{4}{\sqrt{20}}$; е) $\sqrt{5}-2>3\sqrt{5}-9$. 13. а) $-11\sqrt{2}$; б) $4,6\sqrt{3}$; в) $-5\sqrt{5}$. 14. а) $33\sqrt{10}$; б) $23\sqrt{6}$; в) $-96\sqrt{21}$; г) $39\sqrt{3}$. 15. а) –811; б) 32,(6). 16. $34\sqrt{5}$ см. 17. $33\sqrt{3}$ см. 18. а) $S=\{\pm 4\}$; б) $S=\{\pm 0,87(1)\}$; в) $S=\{0\}$; г) $S=\varnothing$; д) $S=\{\pm 3\}$; е) $S=\{0,\ \sqrt{5}\}$. 19. а) $7\sqrt{11}-10\sqrt{7}$. 20. $x=2$, $y=1$, $z=-3\sqrt{7}$.

§4. 1. а) $A\bigcup B=\{-5,-2,3,7,9\}$, $A\bigcap B=\{-5,3,7,9\}$, $A\setminus B=\{-2\}$, $B\setminus A=\varnothing$. 2. а) $A=\{0,1,2,3,4,5\}$; б) $B=\{-8,-7,\ldots,7,8\}$; в) $C=\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$. 5. а) 25; б) 72; в) 19. 8. а) $A\bigcap B$ – множество квадратов. 9. а) [AE]; б) [AF]; в) [CD]; г) $\varnothing$. 10. а) $\{1,2,4,8\}$; б) $\{3,6,12,24,48\}$; в) $\{1,2,5,10,25,50\}$; г) $\{1,3,5,15\}$; д) M_{15}. 11. а) $m=2$, $n=5$; б) $m=-8$, $n=9$; в) $m=11$, $n=5$; г) $m=6$, $n=9$. 12. а) 9; б) 14; в) 0. 13. а) $A=\{1,2,3,4,8,9\}$, $B=\{2,5,6,7,8,9\}$; б) $A=\{d,e,f,g,h\}$, $B=\{a,b,c,e,g\}$. 14. а) $A=\{3,4,5\}$, $B=\{3,5\}$; б) $A=\{a,b,c\}$, $B=\{a,b\}$; в) $A=\{3,4,6,7\}$, $B=\{5,6,7\}$. 15. 5. 16. 25. 17. 40%. 18. а) $A\subset B$; б) $B\subset A$; в) $A\bigcap B=\{10,20,50,100\}$. 19. 7. 20. 19. 21. 55%. 22. 20. 23. 315. 24. 120. 25. 10.

Упражнения и задачи на повторение. 10. а) $6+\sqrt{6},\ 6\frac{1}{6},\ 6-\sqrt{6},\ \frac{\sqrt{6}}{6},\ -\frac{6}{\sqrt{6}},\ \sqrt{6}-6,\ -6,(6),$ $-6\sqrt{6}$; б) $7\sqrt{5},\ 5\sqrt{7},\ \frac{7}{5},\ \frac{5}{7},\ -\frac{7}{5},\ -\frac{5}{\sqrt{7}},\ -5\sqrt{7},\ -7\sqrt{5}$. 11. а) 8; б) –21; в) 2; г) –1; д) $-1\frac{6}{7}$; е) 5; ж) 6; з) $\frac{2}{3}$. 14. а) $\frac{8}{15}$; б) 0,9(7); в) $\frac{7\sqrt{3}}{8}$; г) 6. 15. $20\sqrt{5}$ см. 16. $4\sqrt{3}$ см. 17. 24 см^2. 18. а) 1; б) –2. 19. а) 1; б) 1. 20. а) –1; б) $\frac{1}{6}$; в) 2. 21. а) 0; б) 4; в) $8\sqrt{3}$. 22. а) $1-\sqrt{2}$; б) $\sqrt{2}$. 23. а) 4; б) 3. 24. 2,5. 25. 4,5.

Глава 3. §1. 2. а) $B(3;1), C(-1;1), D(1{,}5;1), E(2;-1)$; б) $F(-1{,}5;-1), G(0;3{,}5), H(-2{,}5;-1),$ $I(-1{,}5;3)$; в) $J(2{,}5;4), K(4;-1), L(-0{,}5;-1{,}5), M(-2;0)$; г) $N(0;-1), P(-2;-2{,}5), Q(-3{,}5;3{,}5),$ $R(2{,}5;-2{,}5)$. 3. $C(-1;-0{,}5), O(0;0), D(1;0{,}5), E(2;1)$. 4. $A(3;0), B(1{,}5;1), C(0;2), D(-1{,}5;3)$. 5. а) I; б) IV; в) II; г) III. 6. а) Точки принадлежат прямой, параллельной оси Oy и проходящей через точку $A(2;0)$. 7. а) 5 лин.ед.; б) 25 лин.ед.; в) 10 лин.ед.; г) 17 лин.ед.; е) 29 лин.ед. 8. а) $M(2;4)$; б) $M(2;2)$; в) $M(0;3)$; г) $M(-6;9)$. 9. а) $A(-3;4)$; б) $A(12;-10)$; в) $A(6;6)$; г) $A(-9;-2{,}5)$. 10. а) $C(1;0), D(3;0)$ или $C(1;8), D(-3;8)$; б) $C(5;0), D(2;0)$ или $C(5;-6), D(2;-6)$. 11. а) 45 квадратных единиц; б) 24 квадратных единиц. 12. а) $(-2,\sqrt{5})$; б) (7,4; 4); в) (0,6; –8,1); г) (–13; –10). 13. а) $\left(3\frac{1}{4};-4\right)$; б) (6; 5); в) (–0,35; 8); г) (–85; 58). 14. а) 21 квадратных единиц; б) 54 квадратных единиц.

§2. 1. а)

–3	2	0	1	5
3	–2	0	–1	–5

б)

–2	–1	0	1	2	3
–8	–1	0	1	8	27

2. Да. 3. Да. 4. а) Да; б) нет; в) нет. 5. Нет. 10. а) $f: B\to A,\ f(x)=-x$; б) $f: A\to B,\ f(x)=\frac{1}{x}$; в) $f: \mathbb{R}_+\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x}$; г) $f: \{x \,|\, |x|<7,\ x\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{Z},\ f(x)=\sqrt{x}$. 11. а) –9,6; б) 14; в) $4\sqrt{2}$; г) –6,5. 12. а) 4; б) –2,5; в) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; г) $1\frac{7}{8}$. **13.** а)

x	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

б)

x	0	1	4	9	16	25
$f(x)$	0	1	2	3	4	5

в)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$f(x)$	–1	0	1	2	3	4	5	6	7

г)

x	–6	–4	–2	0	2	4	6	8
$f(x)$	–18	–12	–6	0	6	12	18	24

14. а) $f(x)=0{,}1x$; б) $f(x)=\frac{x+1}{x+2}$; в) $f(x)=x+0{,}6$; г) $f(x)=2^x$. 15. а) $f(x)=5-x$; б) $f(x)=-|x|$; в) $f(x)=\frac{6}{x}$; г) $f(x)=-\sqrt{x}$. 16. F_i состоит из $\left(\frac{i+1}{2}\right)i$ точек. Значит, получим: 15; 55; 120. 17. а) 2; 0,3; б) –4; –6; –8. **18.** $f(x)=x-\left[\frac{x}{10}\right]\cdot 10$.

§3. 5. а) Да; б) нет; в) да. 9. $f: \mathbb{R}_+\to\mathbb{R},\ f(x)=x$; б) $f: \mathbb{R}_-\to\mathbb{R},\ f(x)=-1{,}5$; в) $f: \mathbb{R}_-\to\mathbb{R},$ $f(x)=-x$. 10. а) A(3, 0); б) A(2, 0); в) A(2; 0), B(–2; 0); г) A(2,3; 0), B(–2,3; 0). 11. а) Да; б) да; в) нет. 12. а) График симметричен относительно оси Oy; б) график симметричен относительно точки $O(0, 0)$. 13. а) $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x|$; б) $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|x|-1$; в) $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2{,}5-|x|$.

§4. 4. а) $A(0;8), B(-10;0)$; б) $A(0;-6), B(-2;0)$; в) $A\left(0;\frac{1}{5}\right), B\left(-\frac{1}{4};0\right)$; г) $A(0;2), B(-\sqrt{2};2)$. 6. а) I, III; б) II, IV; в) I, III; г) I, IV. 7. Все. 8. $m=1{,}6-0{,}1t$, где t – время. 9. $r=20-3x$, где x – количество тетрадей. 11. Скорость первого пешехода. 12. а) $f(x)=\frac{1}{2}x-1$; б) $f(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$; в) $y=-x+\sqrt{3}$; г) $f(x)=2x-4{,}5$. 13. а) Параллельные прямые; б) пересекающиеся прямые; в) параллельные прямые; г) параллельные прямые. 14. а) Тупой; б) острый; в) острый; г) тупой. 15. а) $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=0{,}8x-2$; б) $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-2x+4=0$. 17. а) $f(x)=3x-2$; б) $f(x)=-3x+8$. 18. а) $A(2;-2)$; б) $A(1;-1)$.

Упражнения и задачи на повторение. 3. а) $f(a)=1$; $f(c)=3$; $f(d)=4$; $g(2)=6$; $g(3)=8$; $g(4)=6$; б) $h(1)=0$; $h(4)=1$; $h(5)=5$; $t(a)=f$; $t(d)=j$; $t(e)=i$. 4. а) $f(c)=3$; $g(2)=g(4)=6$; б) $h(3)=h(5)=5$; $t(a)=f$. 5. а)

x	1	3	5
$f(x)$	4	10	16

б)

x	–2	–1	0	1	2
$f(x)$	4	2	0	2	4

в)

x	–3	–2	1	2	3
$f(x)$	3	2	–1	–2	–3

г)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	8	3	0	–1	0	3	8

6. а) $f(1)=\frac{1}{15}$; $f(3)=\frac{1}{5}$; $f(5)=\frac{1}{3}$; б) $f(1)=1$; $f(3)=-1$; $f(5)=-3$; в) $f(1)=3$; $f(3)=1$; $f(5)=-1$; г) $f(1)=3$; $f(3)=5$; $f(5)=7$. 7. а) $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(x)=2x^2$; б) $f\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=-x$; в) $f\colon \mathbb{Q}^*\to\mathbb{Q}$, $f(x)=\frac{1}{x}$; г) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{|x|}$. 8. а) $E=\left\{-\frac{1}{2}; -1; \frac{1}{7}; \frac{1}{5}\right\}$; б) $E=\{2; 1; 0; -1\}$; в) $E=\{0\}$; г) $E=\mathbb{R}_+$. 11. а) $f\colon \{0; 1; 2; 3\}\to\mathbb{N}$, $f(x)=x^2$; б) $f\colon \{0; 1; 2; 3\}\to\mathbb{N}$, $f(x)=2x$; в) $f\colon \{-2; -1; 0; 1; 2\}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=2x$; г) $f\colon \{1; 2; 3; 4\}\to\mathbb{Q}$, $f(x)=\frac{1}{x}$. 14. а) $A\left(\frac{1}{5}; 4\right)$; б) $B\left(\frac{1}{3}; -6\right)$; в) $C\left(-\frac{1}{4}; -3\right)$; г) $D\left(\frac{3}{5}; -1\right)$. 15. в). 18. а) $f\colon \{-5; -3; -1; 3; 5\}\to\mathbb{Q}$, $f(x)=-\frac{1}{15}x$; б) $f\colon \{0; 1; 2; 3; 4\}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=1-x$; в) $f\colon \{0; 1; 2; 3\}\to\mathbb{N}$, $f(x)=3-x$; г) $f\colon \{-2; -1; 0; 1; 2\}\to\mathbb{N}$, $f(x)=|x|+1$. 19. а) $f(x)=2x-1$; б) $f(x)=2x+3$; в) $C(4; -15)$; г) $D(-5; 3)$. 22. а) $A(4; 4)$; б) не содержит; в) $A(-25; -25)$; г) Точки $M(a, a)$, $a\in\mathbb{R}_+$. 23. а) $f(x)=\frac{3}{25}x$; б) $f(180)=21{,}6l$; $f(0{,}5)=0{,}06l$; $f(200)=24l$; в) 37,5; 5; $4\frac{1}{6}$. 25. а) $S(x)=\begin{cases}24, & x\le 300;\\ 24+(x-300)\cdot 0{,}096, & x>300;\end{cases}$ $E(x)=\begin{cases}6, & x\le 200;\\ 6+(x-200)\cdot 0{,}24, & x>200.\end{cases}$ б) $S(100)=24$; $S(400)=33{,}6$; $E(100)=6$; $E(250)=18$; $E(300)=30$; $E(400)=54$.

Глава 4. §1. 3. а) $5x-4y$; б) $a-2b-2$; в) $3\sqrt{2}x$; г) $1{,}5a+0{,}5b$. 4. а) $15xy$; б) $6ab$; в) $2x^2y$. 5. а) $5xy+2{,}5xy$; б) $-\frac{1}{5}x^2+\left(-\frac{1}{5}x^2\right)$; в) $-\sqrt{3}y+2\sqrt{3}y$; г) $-4x+5x$. 6. а) $-0{,}5x^3y^2$; б) $3a^3b^3$; в) $-\sqrt{2}x^3y^2$; г) $-6a^4b^3$. 7. а) $4y$; б) $\frac{2}{3}xy^3$; в) $-0{,}02a^3$; г) $2{,}8a^3b^2$. 8. а) $4a^6b^2$; б) $81x^4y^8$; в) $\frac{1}{27}x^{15}y^3$; г) $\frac{1}{64}a^4b^{20}$. 10. а) $3xy^2$; б) $5a^2$; в) $0{,}1x^4y$; г) $\frac{1}{3}ab^2$. 11. а) $-10x^2-5x+1$; б) $ax^2+1{,}2ax-a^2x+a^2$. 12. а) $2x^2y$; б) $9a^2b^3$; в) $\frac{1}{3}x^2y^8$; г) $6a^5b^5$. 13. а) $6{,}65x+5{,}5y$; б) $3{,}8a+9\sqrt{3}y$. 14. 30. 15. В $\frac{5}{3}$ раз. 16. В 1,8 раза. 17. 5 и 62.

§2. 1. а) $xy+xz$; б) $yz-xz$; в) $6ab-2ac$; г) $-x^2-\frac{1}{2}xy$. 2. а) $xu+xv+yu+yv$; б) $ux+uy-vx-vy$; в) $ac-ad-bc+bd$; г) $bx+by-ax-ay$. 3. а) –9; б) 6; в) 3; г) $3\frac{13}{16}$. 4. 4 см^2. 5. а) $x^3y-\frac{1}{3}x^2y^3$; б) $\frac{4}{3}xy^4+2x^3y^2$; в) $5x^3+0{,}5x^2y-10y^2x-y^3$; г) $x^3y+\frac{1}{4}x^5+\frac{4}{3}y^2+\frac{1}{3}yx^2$.
6. а) $2a^3+(6-\sqrt{3})a^2-5\sqrt{3}a+3$; б) a^3-b^3; в) $2b^3-3b^2+1$; г) $x^3+x^2y-xy^2-y^3$. 7. а) $6m(n+1)$; б) $3b(4y-3)$; в) $5x(3a+4b)$; г) $7y^3(y^2+3)$; д) $(x-1)(4x+1)$; е) $(x-2)(9-y)$; ж) $(a-b)(5+ay-by)$. 8. Площадь прямоугольника на 10 см^2 меньше. 9. Периметр прямоугольника на $4\sqrt{3}$ см меньше. 10. а) $5x^2y(2xy-5y)=10x^3y^2-25x^2y^2$; б) $-7ax\left(-\frac{1}{7}a+2a^2x\right)=$

$= a^2x - 14a^3x^2$; в) $-\frac{1}{12}xy\left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{4}{3}y^2\right) = -\frac{1}{16}x^3y + \frac{1}{9}xy^3$; г) $\frac{5}{6}a^2b\left(\frac{6}{5}b + 6\right)$. 11. а) $5ab(a-5b)$; б) $-6x^4y^4(3y+4x)$; в) $-xy(2-3x^2)$; г) $8y(2xy^3+3)$. 12. 18, 19, 20. 13. а) $5(x-y)^2$; б) $(x-3)(y-2)$; в) $(x-y)(3-y)$; г) $(b+1)(2a+b)$. 14. 9 см^2. 15. а) $x^3y - xy^4$; б) $7ab^3$. 16. 1 и 7. 18. 50 банов. **19.** $\frac{99}{100}$.

§ 3. 2. а) $4x^2 - 12xy + 9y^2$; б) $9a^2 + 30ab + 25b^2$; в) $3x^2 - 2\sqrt{6}xy + 2y^2$; г) $\frac{1}{9}a^2 + \frac{4}{3}ax + 4x^2$; д) $3 + 6\sqrt{3}b + 9b^2$; е) $\frac{b^2}{16} - \frac{1}{6}ab + \frac{a^2}{9}$. 4. а) $(7y+8a)(7y-8a) = 49y^2 - 64a^2$; б) $(5x - \sqrt{7}y)(5x + \sqrt{7}y) = 25x^2 - 7y^2$; в) $(5y-3b)(5y+3b) = 25y^2 - 9b^2$; г) $(0{,}6a + \sqrt{2}b)(0{,}6a - \sqrt{2}b) = 0{,}36a^2 - 2b^2$. 5. а) $(3a+7)^2 = 9a^2 + 42a + 49$; б) $(6a-5b)^2 = 36a^2 - 60ab + 25b^2$; в) $(4x-3y)^2 = 16x^2 - 24xy + 9y^2$; г) $(\sqrt{6}b + \sqrt{2}a)^2 = 6b^2 + 4\sqrt{3}ab + 2a^2$. 6. а) $(9 - 4\sqrt{5})$ см^2; б) $(13 + 4\sqrt{3})$ см^2. 7. 32; 8. 43. 9. 8 см. 10. 12 см. 13. а) Истинно; б) ложно; в) ложно. 14. а) 14; б) 194. 15. а) 66; б) 4354. 16. а) 1; б) 1; в) 1024; г) 6561.

§ 4. 3. а) $(4x+y)^2$; б) $(3y-2x)^2$; в) $(5x+4)^2$; г) $(0{,}5a-2b)^2$. 4. а) 1; б) $\sqrt{3}$; в) 2; г) $2\sqrt{6}$; д) $3\sqrt{2}$; е) $3\sqrt{2}$. 5. а) $(3+2\sqrt{5})^2$; б) $(5-4\sqrt{3})^2$; в) $(9+2\sqrt{2})^2$; г) $(8-3\sqrt{3})^2$; д) $(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$; е) $(\sqrt{5}-\sqrt{12})^2$. 8. а) $(\sqrt{3}+3\sqrt{3})^2$; б) $(\sqrt{7}+\sqrt{7})^2$; в) $(-2\sqrt{35}+\sqrt{35})^2$; г) $(3\sqrt{7}+\sqrt{7})^2$; д) $(2\sqrt{11}+\sqrt{11})^2$. 10. а) $3\sqrt{2} - 4\sqrt{2}a$; б) $2a$; в) $x - 4y$; г) $2(x-\sqrt{5})^2$; д) $-4ax$. 11. а) $(2a+y)(2a-y-1)$; б) $(3x-y)(3x-y+1)$; в) $(5b-4y)(5b+4y+1)$. 12. а) 8; б) 62; в) $1\frac{13}{35}$. 13. –4. 14. 4. 16. а) $a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 2|a||b| - 2|a||b| = (a+b)^2 - 2|a||b| = (a+b)^2 - (\sqrt{2|ab|})^2 = (a+b-\sqrt{2|ab|})(a+b+\sqrt{2|ab|})$.

Упражнения и задачи на повторение. 1. а) $1{,}5a + 4{,}2b$; б) $-4x + y - 2$; в) $-2{,}5x^2y^2 + 2x^2y + \frac{1}{4}yx^2$; г) $-ab + \frac{5}{4}a - 0{,}5$. 2. а) $2x^2y^3$. 3. а) $7x^2y$. 4. а) $64x^{18}y^{12}$. 5. а) 12; б) 3; в) 20; г) –42. 6. а) –49; б) $8 - 5\sqrt{2}$; в) $4\sqrt{15} + 24\sqrt{3} - 10\sqrt{5} - 60$; г) 162. 7. а) $y(x^2 + 3z)$. 8. а) $\frac{9}{16}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{4}{81}$. 9. а) $(2y+3x)^2 = = 4y^2 + 12xy + 9x^2$. 10. а) $(15 + 11\sqrt{3})$ см^2. 11. а) $(51 - 14\sqrt{2})$ см^2. 12. а) 80. 13. а) $-2a^2 + 4a - 16$; б) $5x - 14$; в) $4a$; г) $9 + x^2$; д) 49. 14. а) $\frac{3}{2-\sqrt{3}} = \frac{3(2+\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{3(2+\sqrt{3})}{4-3} = 3(2+\sqrt{3})$. 15. а) $(x-9y)^2$. 16. а) $(2-\sqrt{3})$ см; б) $(3\sqrt{5}-2)$ см. 17. а) 22; б) 2,5. 18. а) $\sqrt{5}$; б) $2\sqrt{21}$; в) 0,8; г) $\sqrt{2}$. 19. 11. 20. 14. 21. а) $S = \{-2; 6\}$; б) $S = \{-4; 1\}$; в) $S = \left\{-\frac{10}{3}; 4\right\}$; г) $S = \{-12; 2\}$. 22. а) 22; б) –1; в) –1; г) 1. 23. а) 1; б) 36. 24. 304; 92288. 25. 0,2. 28. $2011 = 1006^2 - 1005^2$.

Глава 5. §1. 1. а) 0; б) 14; в) –1; г) $-\frac{4}{9}$. 2. а) 14; б) –25; в) –30,25; г) $2\frac{35}{36}$. 6. а) 1; б) 1; в) $\frac{5}{6}$; г) 1,3. 7. а) 5; б) $\frac{8}{3}$; в) –9; г) 0,8. 8. а) $\mathbb{R} \setminus \{4\}$; б) $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$; в) $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$; г) $\mathbb{R} \setminus \left\{13\frac{1}{3}\right\}$; д) $\mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$; е) $\mathbb{R} \setminus \{\pm 0{,}6\}$. 9. а) 2,8; б) –3,2; в) $7\frac{7}{15}$; г) $\frac{8}{35}$. 10. а) $F(0) < F(1)$; б) $F(-2) < F(-1)$; в) $F(0{,}5) > F(-0{,}5)$; г) $F(10) < F(-10)$. 11. а) $F(-1), F(-2), F(-3), F(3), F(2), F(1)$; б) $F\left(\frac{1}{2}\right), F(-4), F(4), F\left(-\frac{1}{2}\right)$. 12. а) –5; 1; 3; 9; б) –2; 2; 4; 8; в) –11; –5; –3; –1; 1; 7; г) –14; –12; –11; –9; –8; –6. 13. а) $-\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{5}$; в) –3; г) $-\frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2}$.

§2. 6. а) $\frac{x^2}{2y}$; б) $\frac{-x^2}{3y^2}$; в) $\frac{x^2}{2x+y}$; г) $\frac{3x+2y}{7y}$. 7. а) $\frac{3}{4}=\frac{9}{12}=\frac{0,3}{0,4}=\frac{8,4}{11,2}=\frac{-16,8}{-22,4}$; б) $\frac{5}{8}=\frac{11}{17,6}=\frac{8}{12,8}=\frac{-32}{-51,2}=\frac{-17,5}{-28}$. 8. а) $\frac{x-1}{xy}=\frac{x^2-x}{x^2y}=\frac{xy-y}{xy^2}=\frac{0,5x^3-0,5x^2+x-1}{0,5x^3y+xy}$; б) $\frac{x+y}{x-y}=\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2}=\frac{-7x-7y}{7y-7x}=\frac{3y^2-3x^2}{-3(x-y)^2}$. 10. а) $\frac{3}{x+2}$; б) $\frac{2(a-b)}{a+b}$; в) $\frac{-x-y}{x}$; г) $\frac{4(b-2x)}{b+2x}$. 11. 80. 12. 9.

§3. 1. а) 1; б) $\frac{6}{7}$; в) $-\frac{2}{47}$; г) $-\frac{7}{39}$. 2. а) $1\frac{3}{8}$; б) $-\frac{11}{30}$; в) $\frac{16}{45}$; г) $1\frac{17}{48}$; д) $-1\frac{17}{84}$. 3. а) $\frac{13}{xy}$; б) $\frac{a+b}{a-b}$; в) $\frac{4x}{x^2+1}$; г) –3y. 4. а) $\frac{a^2+b^2}{ab}$; б) $\frac{6+2y}{xy}$; в) $\frac{2ax}{x^2-a^2}$; г) $\frac{4-x^2}{2x(x+1)}$. 5. а) $\frac{36}{85}$; б) $-\frac{63}{80}$; в) $-\frac{3}{11}$; г) $\frac{1}{6}$. 6. а) $\frac{3x^2}{y^3}$; б) $\frac{10x^3y^2}{y^2-1}$; в) $\frac{4(x^2-1)}{(x-2)^2}$; г) $\frac{8}{7x}$. 7. а) $\frac{11}{4}$; б) $-\frac{5}{4}$; в) $-\frac{3}{4}$; г) $\frac{4}{7}$. 8. а) $\frac{4y}{3x}$; б) $\frac{b+ay}{ax-b}$; в) $\frac{3x^2}{7x-5}$; г) $\frac{25-x^2}{4y}$. 9. а) $\frac{ab}{y}$; б) $\frac{1-x}{x+2}$; в) –1; г) $\frac{8x}{y}$. 10. а) $\frac{36}{49}$; б) $-\frac{27}{125}$; в) $\frac{256}{625}$; г) $\frac{3^8 5^6}{2^{10}}$. 11. а) $\frac{x^3y^3}{27a^3}$; б) $\frac{x^2(x+y)^2}{(x-y)^2}$; в) $\frac{x^6a^3}{y^{15}b^9}$; г) $\frac{4(x-1)^2}{(3a+b)^2}$. 12. а) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$; б) $\frac{-x-2}{(x+1)^2}$; в) $\frac{-3x}{a(x+y)}$. 13. а) $\frac{2x}{x+y}$; б) $\frac{2xy}{x+y}$. 14. а) $\frac{5}{4\sqrt{2}+1}=\frac{20\sqrt{2}-5}{31}$; б) $\frac{17}{1-8\sqrt{5}}=\frac{17(1+8\sqrt{5})}{319}$.

Упражнения и задачи на повторение. 2. а) 5; б) 4,5; в) 5; г) $\frac{13}{5}$. 5. а) $\frac{3}{x+3}$; б) $\frac{a-b}{a+b}$; в) $\frac{-a}{x+a}$; г) $-\frac{x+2}{x}$. 6. а) $\frac{y+2x}{x^2y^2}$; б) $\frac{2x+16y}{x^2-4y^2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{-7x-23}{x^2-16}$. 7. а) $\frac{(x+1)^2}{x-2}$; б) $xy+y^2$; в) $\frac{y}{10ab^2x^2}$; г) $\frac{axy}{z^2}$. 8. а) $\frac{9x+3}{y}$; б) $-\frac{x}{3x+6}$; в) $-\frac{a^4b^6}{6(x-1)^3}$; г) $\frac{a+3}{2ax}$. 9. а) $\frac{a-b}{x}$; б) $\frac{1-x}{y+z}$; в) $\frac{x-y}{z-t}$; г) $\frac{y-z}{x}$. 10. а) $\frac{a^3(x+1)^6}{b^3(x-1)^3}$; б) $\frac{x^8(x-1)^4}{y^{12}(x+1)^8}$; в) $\frac{a^2b^4x^6}{(a-b^2)^4y^8}$; г) $\frac{25(a^2-x)^8}{9y^8x^4}$. 11. а) $\frac{(ax-b)^2}{a^2}$; б) $\frac{(x-3y)^2}{y^2}$; в) $\frac{x^2-x+2}{x^2-1}$; г) $\frac{6a-3}{4a^2-9}$. 12. а) $\frac{a-2}{a+b^2}$; б) $\frac{x+y^2}{x-2}$; в) $\frac{3x+y}{xy}$; г) $\frac{a-b}{4(a+b)}$. 13. а) 3,6; б) 2,5; в) –3; г) –3. 14. а) $\frac{4}{x+1}$; б) –2x.

Глава 6. §1. 1. а) $20=x+8$; б) $x=\frac{1}{3}(x+2)$. 2. C. 4. а) 0; б) –1; 1. 5. а) Одно решение; б) нет решений. 6. а) Одно решение; б) нет решений. 7. а) Любое число из множества $\mathbb{R}\setminus\{1\}$; б) 1. 8. а) Ложно; б) ложно; в) ложно; г) ложно. 9. а) $\mathbb{R}^*$; б) $\mathbb{R}\setminus\{4\}$; в) $\mathbb{R}$; г) $\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$. 10. а) Одно решение; б) нет решений; в) бесконечное множество решений. 11. а) $\frac{7+x}{2}=7x$; б) $0,12x=25$. 12. $5x-3=3x+1$. 13. а) Например, 7; б) например, $\sqrt{3}$. 16. а) Да; б) нет; в) $S=\mathbb{R}_+$. 17. а) $\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$; б) $[0;+\infty)$; в) $\mathbb{R}$; г) $\mathbb{R}^*$. 22. C. 23. а) Нет; б) нет; в) да; г) да.

§2. 2. а) $S=\{3\}$; б) $S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$; в) $S=\left\{\frac{2}{15}\right\}$; г) $S=\left\{\frac{1}{28}\right\}$; д) $S=\left\{\frac{2}{3}\right\}$; е) $S=\{50\}$; ж) $S=\{-0,48\}$; з) $S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$. 3. а) –3; б) –2,56; в) $-\frac{1}{5}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{3}$. 4. а) $S=\{3\}$; б) $S=\{4\}$; в) $S=\{7,36\}$; г) $S=\left\{-1\frac{3}{4}\right\}$; д) $S=\{5\}$; е) $S=\{-40\}$; ж) $S=\left\{-1\frac{1}{17}\right\}$; з) $S=\{5\}$. 8. а) $S=\{7\}$; б) $S=\{-46\}$.

9. –3. 10. $\frac{7}{11}$. 11. а) 8; б) 9; в) –2; г) –5. 12. а) 50; б) 40; в) 5; г) 3. 13. а) $S=\{8\}$; б) $S=\left\{1\frac{1}{5}\right\}$; в) $S=\{2\}$; г) $S=\{6\}$. 14. а) –1; б) $\frac{1}{2}$; в) 0; г) –10. 15. а) $m\in\mathbb{R}^*$, $S=\left\{\frac{4}{m}\right\}$; б) $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $S=\left\{-\frac{2}{m+1}\right\}$; в) $m\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$, $S=\{0\}$. 16. а) $S=\{\pm2\}$; б) $S=\varnothing$; в) $S=\{-1;\ 5\}$; г) $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$; д) $S=\{-2{,}8;\ 3{,}2\}$; е) $S=\{-8{,}3;\ 16{,}3\}$; ж) $S=\varnothing$; з) $S=\{-56;\ 44\}$.

§3. 1. а) 6; б) 46. 3. 6 кг; 12 кг. 4. 30 учеников. 5. 10 мин. 6. 14 мин. 7. 10; 11; 12. 8. 45. 9. 24 л; 21 л; 16 л. 10. 1,5 кг. 11. В 13:00. 12. 4 км/ч. 13. 76 пельменей. 14. 6 км. 15. 2,4 км.

§4. 2. в) $5\le 8{,}5$; г) $-6\ge -12$. 3. а) И; б) Л; в) И; г) Л; д) Л. 4. а) Да; б) нет; в) да; г) да; д) нет; е) да. 8. а) И; б) Л; в) И; г) Л; д) Л; е) И. 9. а) $[2;\ 5)$; б) $(0;\ 50]$; в) $[0;\ 5000]$. 11. а) $[-2;\ 6)$; б) $(-\infty,\ 3)$; в) $[1;\ +\infty)$; г) $[-1;\ 0]$; д) $(-3;\ +\infty)$; е) $(-\infty;\ 0]$. 13. а) $a>b$; б) $a<b$; в) $a<b$; г) $a>b$. 14. Нет. 16. а) –9; –1; б) –1; 2; в) 6; 9; г) 3; 17; д) 2; 7; е) –3; 5; ж) –9; 0; з) –4; 3. 18. а) $(-10;\ 7)$; б) $(-3;\ 78]$; в) $(-\infty;\ +\infty)$; г) $(-7{,}3;\ 3{,}5]$; д) $(-\infty;\ +\infty)$; е) $(-\infty;\ 1]$. 19. а) $(-2,\ 2)$; б) $(-1,\ 2)$; в) $\varnothing$; г) $(0,\ +\infty)$; д) $\varnothing$; е) $\{7\}$. 20. а) $[0,\ +\infty)$; б) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$; в) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; г) $\mathbb{R}$. 23. а) $\{2, 3, 4\}$; б) $\{-3, -2\}$; в) $\{4, 5\}$; г) $\{-3, -2\}$.

§5. 1. а) $S=(6,\ +\infty)$; б) $S=(-\infty,\ -5]$; в) $S=(-\infty,\ 3)$; г) $S=[2,\ +\infty)$; д) $S=(-\infty;\ -0{,}5)$; е) $S=\varnothing$; ж) $S=(-\infty;\ 36]$; з) $S=(-\infty;\ -3)$. 3. а) $x\in\left(-\infty,\ -\frac{5}{8}\right)$; б) $x\in\left(1\frac{1}{4},\ +\infty\right)$; в) $x\in\left[-\frac{5}{8},\ +\infty\right)$; г) $x\in(-\infty,\ 2]$. 4. а) –1; б) 0; в) 4; г) –4. 5. а) 3; б) 8; в) –3; г) 30. 6. а) $S=\left[\frac{2}{3},\ +\infty\right)$, $\{\sqrt{2},\ 101\}\subset S$; б) $S=[11;\ +\infty)$, $101\in S$; в) $S=\left(-\infty,\ -\frac{1}{5}\right)$, $-21\in S$; г) $S=(-\infty;\ 1{,}5)$, $\{-21,\ -\frac{1}{5},\ 0,\ \sqrt{2}\}\subset S$. 7. $x\in(-\infty,\ -9]$. 8. $y\in\left(-\infty,\ 1\frac{6}{7}\right]$. 9. а) $S=\mathbb{R}$; б) $S=\left(-\frac{3}{4},\ +\infty\right)$; в) $S=(-\infty,\ -11]$; г) $S=\left(-\infty,\ \frac{1}{4}\right]$. 10. а) $S=\left(-\infty,\ -2\frac{2}{7}\right)$; б) истинно. 11. а) $S=\left(\frac{1}{2},\ +\infty\right)$; б) ложно. 13. а) $S=(2,\ +\infty)$; б) $S=[-3,\ +\infty)$. 14. а) $x\in(-\infty,\ 7)$; б) $x\in(-\infty,\ -6]$. 15. $x\in[-5;\ 0)$. 16. $x\in(0;\ 2]$. 17. а) $a=7$; б) $a=5$; в) $a=-4$. 19. а) $S=(1,\ 4]$; б) $S=(2,\ +\infty)$. 20. а) $S=(-\infty,\ -3]\cup[3,\ +\infty)$; б) $S=[-5;\ 5]$; в) $S=(-3{,}5;\ 3{,}5)$; г) $S=(-\infty;\ -6)\cup(6;\ +\infty)$.

Упражнения и задачи на повторение. 1. 8. 2. 4. 3. а) $S=\{1\}$; б) $S=\{-1\}$; в) $S=\{-4{,}5\}$; г) $S=\{2\}$. 4. 5 см; 11 см. 5. а) $S=(-11,\ +\infty)$; б) $S=(-\infty,\ 4]$; в) $S=[0;\ +\infty)$; г) $S=\left(-\infty,\ 1\frac{2}{3}\right)$. 6. а) $S=\{-2\}$; б) $S=\{1{,}75\}$; в) $S=\{15\}$; г) $S=\varnothing$. 7. 400 леев. 9. а) $S=\left(\frac{1}{3},\ +\infty\right)$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$; б) $S=(-\infty,\ -1)$, $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{5}$. 10. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. 12. а) $S=\{2\}$; б) $S=\{6\}$; в) $S=\{8\}$; г) $S=\left\{1\frac{1}{5}\right\}$. 13. $S=\{-1\}$. 14. а) $m=4$; б) $m=-2$. 15. а) $a\in(-\infty,\ 0)$; б) $a\in(0,\ +\infty)$; в) $a=0$. 16. 160 орехов. 17. $S=[-3,\ 1)$. 18. а) $S=\{8\}$; б) $S=\{-1\}$.

Геометрия

Глава 1. §1. 3. а) 1,8 см; б) 4,6 см; в) 14,6 см; г) 8,2 см. 4. а) Да; б) да в) да; г) нет. 6. $[aB\cap[bB$ или $[aB\cap[bA$. 7. а) K; б) N; в) N; г) M. 9. 3. 12. а) Истинно; б) ложно; в) ложно; г) ложно; д) истинно; е) ложно. 13. а) 4; б) 6; в) 6; г) 12. 14. а) 46,6 см; б) 83,4 см; в) 48,2 см. 15. а) 7 способов: a, AB, AC, BC, BA, CA, CB; б) 13 способов. 17. а) 6; б) 10; в) 17.

§2. 4. а) 3; б) 6; в) 10; г) 45. 6. а) Некомпланарные или пересекающиеся; б) нет; в) пересекающиеся или некомпланарные; г) нет. 7. а) Возможно; б) возможно; в) невозможно; г) возможно. 9. а) 6; б) 8; в) 8. 10. Возможно. Например, прямые, содержащие ребра треугольной пирамиды, некомпланарны, но каждые две из них пересекаются.

§3. 4. а) Истинно; б) истинно; в) ложно; г) истинно. 5. 28 см. 6. 12 см. 7. 4 см, 8 см или 12 см, 24 см. 10. В 3 раза.

§4. 1. а) Принадлежит окружности; б) принадлежит внешней области окружности; в) принадлежит внешней области окружности; г) принадлежит внутренней области окружности. 2. а) 10π м; б) $4{,}5\pi$ м; в) 6 м; г) $2\sqrt{7}\pi$ м. 3. а) 8π м; б) $1,(4)\pi$ м; в) 6 м; г) $4\sqrt{5}\pi$ м. 4. а) 49π м^2; б) 12π м^2; в) $13(4)\pi$ м^2; г) $1{,}5625\pi$ м^2. 5. а) 16π м^2; б) $11(1)\pi$ м^2; в) 2,25 м^2; г) 11π м^2. 6. а) 3 м; б) 4,5 м; в) $\frac{1}{2\pi}$ м; г) $\frac{10}{\pi}$ м. 7. а) 20 м; б) 10 м; в) $\frac{20}{\sqrt{\pi}}$ м; г) $\frac{40}{\sqrt{\pi}}$ м. 8. а) 6 см; б) 8π см; в) $4\sqrt{3}$ см; г) $\frac{4}{7}$ см. 11. а) 5π м; б) $2\sqrt{3}\pi$ м; в) 3π м. 12. а) 8π м^2; б) 5π м^2; в) $0{,}75\pi$ м^2. 13. а) 84π м^2; б) 200π м^2. 15. б) 20 см. 16. $\frac{15}{\pi}$ см.

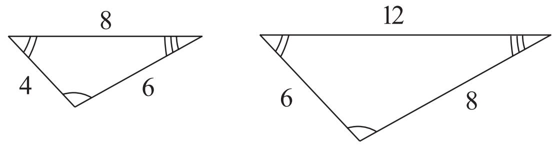
§5. 3. а) 1; б) 0; в) 4 или –4; г) для любого целого значения.

Упражнения и задачи на повторение. 4. а) 23,1 см; б) 12,4 см. 6. а) 5,4 м; б) 8 м. 7. 3 см. 8. $MN=48$ см; $KP=24$ см. 9. 4 см, 6 см, 7 см. 10. а) $11+7=18$; б) $3\cdot 11-4\cdot 7=5$; в) $6\cdot 11-8\cdot 7=10$. 11. а) 3,5; б) $\frac{3}{7}$; в) $\frac{1}{3}$. 12. а) 6; б) 10; 15; в) 7; 8. 14. а) $[BC]$; б) $[AD]$; в) $\varnothing$; г) [BE; д) $[BC]$; е) $[CD$. 15. $\frac{5}{12}$ см или $7\frac{1}{12}$ см. 16. а) Истинно; б) ложно; в) ложно; г) истинно.

Глава 2. §1. 3. а) 30°; б) 52°; в) 110°; г) 169°. 4. а) $m(\angle ACB)=m(\angle DCE)=50°$, $m(\angle ACE)=130°$. 5. а) 30°; б) 80°; в) 35°; г) 65°. 6. а) 45°; б) 150°; в) 65°; г) 165°. 7. а) 103°10′; б) 162°3′; в) 126°54′3″; г) 76°16′15″. 8. а) 61°31′. 9. а) 23°42′. 11. а) 136° и 44°; б) 68° и 112°. 12. 22° и 68°. 13. 34° и 146°. 14. 130° и 50°. 15. а) Истинно; б) ложно; в) истинно; г) истинно. 16. 20°, 20°, 160°, 160°. 17. Совпадают или перпендикулярны. 18. 5°.

§2. 4. а) 110°; б) 48°; в) 50°; г) 60°. 5. а) 29,1 см; б) 34,6 см; в) 27 см; г) 24 см. 6. а) 88°; б) 25°. 7. а) $m(\angle A)=70°$, $m(\angle B)=80°$, $m(\angle C)=30°$. 8. а) 51 см; б) $15\sqrt{2}$ см. 9. а) Не могут; б) не могут; в) могут; г) могут. 10. а) $\angle B$ – наибольший, $\angle A$ – наименьший. 11. а) BC, AC, AB. 12. 60 см. 13. 50,4 см. 14. 52,7 см^2. 16. а) Истинно; б) истинно; в) истинно; г) ложно. 17. 17 см, 18 см, 19 см. 18. а) Ложно; б) истинно. 20. 60°, 108°, 12°. 21. Больше, чем 8 см и меньше, чем 40 см.

§3. 5. а) $[AC] \equiv [DF]$; б) $\angle B \equiv \angle E$. 6. $AO = BO = 8$ см, $BC = 7$ см. 10. 8 см 11. 40°.
14. а) Нет; б) нет.
15. $AC = 9$ см, $BC = 10$ см.
16. Нет (см. случай на рисунке).



§4. 1. $AD = 9$ см, $DC = 6$ см, $BD = 6$ см. 2. $BD = 6$ см, $CD = 5$ см. 4. 12 см. 6. 35°. 9. $AB = 7$ см. 10. $BE = 10$ см.

Упражнения и задачи на повторение. 1. а) 72°; б) 62°; в) 99°; г) 44°. 2. а) 90°; б) 90°; в) 45°; г) 45°. 3. а) 90°; б) 148°. 4. 75° и 75°. 5. 20° и 70°. 6. 55° и 125°. 7. а) 114°41′; б) 72°46′; в) 66°50′23″; г) 48°13′37″. 8. 8°47′6″. 9. 18°. 11. а) 80°; б) 36°; в) 90°; г) 90°. 20. а) *Указание*. $180° - 19° \cdot 9 = 9°$. 21. а) 50°; б) 52°30′. 22. *Указание*. Используйте неравенство треугольника.

Глава 3. §1. 4. 7. 5. 55°. 6. 88°. 7. а) 35; б) 20; в) 450; г) 15. 9. $y = -\frac{2}{3}x + 2$ – это уравнение прямой AB. Пусть $-\frac{2}{3}x + b$ – уравнение прямой MN, где $MN \parallel AB$. Так как $C(6, 0) \in MN$, то $0 = -\frac{2}{3} \cdot 6 + b \Rightarrow b = 4$. Значит, $y = -\frac{2}{3}x + 4$ – уравнение прямой MN. Таким образом, например, при $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ получим точки $M(0, 4)$, $N(3, 2)$. 10. 42°, 42°, 42°, 42°, 138°, 138°, 138°, 138°.

§2. 1. а) 1,5 см, 2 см, 2,5 см; б) $\frac{5}{16}$ см, $\frac{3}{7}$ см, $\frac{2}{5}$ см; в) $\sqrt{3}$ см, $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ см, $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$ см; г) 1,(2) см, 1,8(3) см, 0,9(4) см. 2. а) 23,(8) см; б) $18\sqrt{3}$ см; в) 14,(8) см. 3. 45°, 60°, 75°. 4. $2\sqrt{7}$ см. 6. 12 см, 14 см, 14 см. 7. 10 см, 10 см, 12 см. 8. 5 см, 5 см, 6 см, 6 см. 9. а) $AC = 9$ см, $BC = 10$ см; б) $AC = 10{,}8$ см, $AB = 8{,}2$ см, в) $AC = 6\sqrt{5}$ см, $BC = 5\sqrt{5}$ см; г) $AC = 10{,}(4)$ см, $AB = 8{,}(8)$ см. 10. 22,(6) см. 11. 29,2 см.

§3. 2. а) $AM = 8$ см. 3. а) $M_1(\sqrt{3}, 0)$. 4. а) 3; б) 2. 5. а) 7 см; б) 60°. 6. а) 40°; б) 100°. 7. а) 48°; б) 55°. 8. 3. 11. а) $C_1(3; 4)$; б) $B_1 = C$; в) $A_1 = C$. 12. а) 35°; б) 6 см.

§4. 3. а) 35°; б) 40°; в) 40°26′; г) 8°30′. 5. а) 48°; б) 55°; в) 50°; г) 20°. 8. а) 150°; б) 30°. 10. а) 40°; б) 80°. 14. а) 120°; б) 15 см.

Упражнения и задачи на повторение. 2. 90°. 3. 65°. 4. а) Параллельны; б) параллельны. 5. 112°30′. 7. 15 см. 8. 55°30′. 9. 54°30′. 10. 19°. 16. $MK = LN = 3$ см, $KL = 6$ см. 20. 49°.

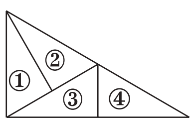
Глава 4. §1. 1. а) 59°; б) 40°; в) 45°. 2. а) 58°; б) 45°; в) 112°. 3. а) 95°; б) 100°; в) 60°. 4. 120°. 5. 90°, 135°, 135°. 6. 90°, 110°, 160°. 7. 360°. 8. 30°, 70°, 80°. 9. 45°, 50°, 85°. 10. а) 35°, 55°; б) 45°, 95°; в) 60°, 50°. 11. 44°. 12. 40°, 60°, 80°. 13. а) 35°; б) 24°. 14. 45°, 60°, 75°.

§2. 2. а) Ложно; б) ложно; в) истинно; г) ложно. 5. а) Прямоугольный; б) остроугольный; в) тупоугольный. 6. 3 см. 7. а) $AO = 6$ см, $BO = 8$ см; б) $AM = 6\sqrt{3}$ см, $BN = 9\sqrt{3}$ см; в) $OM = 4$ см, $ON = 5$ см; г) $AO = 2\sqrt{5}$ см, $BO = 2\sqrt{6}$ см. 8. а) 60°, 80°, 40°; б) $m(\angle BAM) = 37°$, $m(\angle BCM) = 18°$; в) $m(\angle AMC) = 140°$, $m(\angle BMC) = 113°$; г) $m(\angle A) = m(\angle B) = 80°$, $m(\angle C) = 20°$. 9. а) $m(\angle BAM) = 20°$, $m(\angle MAC) = 40°$; б) $m(\angle BAM) = 30°$, $m(\angle MAC) = 20°$. 10. а) 12°; б) $m(\angle ACN) = 40°$, $m(\angle BCN) = 25°$; в) 63°; г) 62°. 11. а) 44°; б) 55°; в) 108°. 12. а) $4\sqrt{7}$ см; б) 24 см. 14. 50°.

§3. 2. а) 6 см; б) 5,5 см; в) 10 см; г) $\sqrt{5}$ см. 3. а) 50°; б) 62°; в) 50°; г) 56°. 5. а) 92°; б) 70°; в) 70°; г) 44°. 6. а) 6 см; б) 4,5 см; в) $2\sqrt{3}$ см; г) 2,(1) см. 7. а) $m(\angle 1) = 58°$, $m(\angle 2) = m(\angle 5) = 30°30'$, $m(\angle 3) = m(\angle 4) = 90°$, $m(\angle 6) = m(\angle 7) = 59°30'$, $m(\angle 8) = 61°$. 8. 138°. 9. $m(\angle 1) = 130°$, $m(\angle 2) = 40°$, $m(\angle 3) = 25°$. 10. $m(\angle 1) = 111°$, $m(\angle 2) = 69°$, $m(\angle 3) = 76°30'$, $m(\angle 4) = 103°30'$. 11. а) 4 см, 12 см, 12 см; б) 7 см, 17,5 см, 17,5 см. 12. $2\sqrt{2}$ см. 13. $CM = DM = 9$ см. 14. 40°.

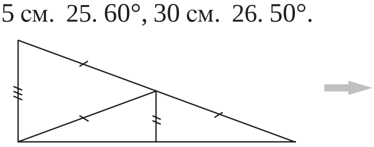
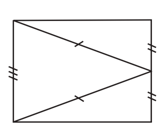
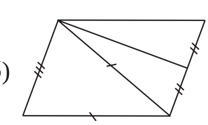
§4. 3. а) 60°; б) 120°; в) 125°; г) 60°. 4. $8\sqrt{3}$ см. 5. 15 см^2. 6. 8 см. 7. 6 см. 8. 4 см. 9. 7,5 см. 10. 21 см. 11. 2,8 см. 12. 120°, 60°. 13. 8 см^2. 14. 36 см^2. 15. 8 см^2.

§5. 1. а) 55°; б) 50°; в) 148°; г) 62°. 2. а) 5 см; б) 8 см; в) $\sqrt{2}$ см; г) 4 см. 3. а) 12 см; б) $\sqrt{5}$ см; в) 4,5 см; г) 3. 4. а) 32°; б) 40°; в) 50°; г) 84°. 5. а) 8 см; б) 12 см; в) 11 см; г) $2\sqrt{5}$ см. 6. а) 11 см; б) 9 см; в) 24 см; г) 10 см. 7. а) $AB = 14{,}5$ см, $PM = 9{,}5$ см, $QN = 5$ см; б) $BM = MN = 2\sqrt{2}$ см, $NC = 4\sqrt{2}$ см. 8. а) $DF = 2\sqrt{5}$ см, $EG = 4\sqrt{5}$ см, $BC = \dfrac{11\sqrt{5}}{2}$ см; б) $AD = 9{,}6$ см, $DE = 2{,}4$ см, $EB = 4$ см. 9. 3 см. 10. $16\sqrt{3}$ см. 11. а) 6 см; б) 40 см. 12. $\dfrac{1}{2}$. 13. 20 см^2. 14. а) 2,5 см; б) 2,5 см. 15.



§6. 7. $A_1(2; -3)$; $B_1(-1; -4)$; $C_1(-2; 7)$. 13. а) 4; б) 1; в) 2; г) 3. 14. а) M(2; 2); б) M(2; 2); в) M(3; 8); г) M(1,5; –5). 15. а) $A_1(3; 3)$; б) $A_1(2; -4)$; в) $A_1(4; -3)$; г) $A_1(5; -1)$. 16. а) M(–3; 0); б) M(0,5; 0,5); в) M(–3; –8); г) $M\left(\dfrac{1}{3}; -1{,}5\right)$. 17. а) $A_1(2; -7)$, $B_1(-3; -1{,}5)$, $C_1(2\sqrt{2}; 4)$; б) $A_1(-2; 7)$, $B_1(3; 1{,}5)$, $C_1(-2\sqrt{2}; -4)$. 18. 55°. 20. Равнобедренные. 21. а) 12 см; б) 15 см. 22. Эквидистантные параллельные прямые (то есть расположенные на одинаковом расстоянии друг от друга). 23. 12 см.

Упражнения и задачи на повторение. 2. а) 80°; б) 140°; в) 100°. 3. а) 105°, 105°, 150°; б) 80°, 100°, 100°; в) 105°, 110°, 145°; г) 90°, 120°, 150°. 4. а) Истинно; б) ложно; в) ложно; г) ложно. 5. а) $AG = 8$ см, $BG = 6$ см; б) $BG = 2{,}2$ см, $CG = 2$ см; в) $A_1G = 6$ см, $B_1G = 5$ см; г) $A_1G = 0{,}5$ см, $C_1G = 0{,}8$ см. 6. а) 50°, 60°, 70°; б) $m(\angle BAO) = 35°$, $m(\angle COA) = 140°$; в) $m(\angle BOC) = 115°$, $m(\angle AOB) = 125°$; г) 360°. 7. а) 60°, 60°; б) 45°, 45°; в) 40°, 40°. 8. а) Равнобедренный; б) равносторонний; в) равнобедренный; г) равносторонний; д) прямоугольный. 9. 16,5 см. 15. а) $\angle B, \angle A, \angle C$; б) $\angle B, \angle C, \angle A$. 20. а) 60°, 120°, 180°; б) 240°, 72°, 48°. 21. а) $AA_1 = 9$ см; $BB_1 = 7{,}5$ см; б) $BB_1 = 18$ см, $CC_1 = 15$ см; в) $A_1G = 2{,}1$ см; $B_1G = 1{,}9$ см; г) $AA_1 = 12{,}6$ см, $CC_1 = 10{,}5$ см. 22. а) 20°, 50°, 110°; б) 50°, 60°, 70°. 23. $6\sqrt{5}$ см. 24. 5,5 см. 25. 60°, 30 см. 26. 50°.

29.  а)  б) 

30. Равносторонний.

СОДЕРЖАНИЕ

Алгебра

Геометрия